Ion CRĂCIUN

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CALCUL INTEGRAL

EDITURA PIM
IAŞI 2007

Cuprins

Capitolul 1

Integrale improprii

1.1 Introducere

Definiţia *integrabilităţii Riemann* a unei funcţii reale de o variabilă reală, mărginită, $f : [a, b] \to I\!R$, ca limita finită a *sumelor integrale Riemann*

$$\sigma_\Delta(f, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

pentru lungimea celui mai mare interval $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ tinzând la zero, nu înglobează cazul când integrantul f este o *funcţie nemărginită* sau *intervalul de integrare* $[a, b]$ *este infinit.*

Lungimea celui mai mare interval $[x_{k-1}, x_k]$ se notează cu $\|\Delta\|$ şi se numeşte *norma diviziunii*

$$\Delta = \{x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\},\ x_{k-1} < x_k,\ k = \overline{1, n}$$

iar $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se numesc *puncte intermediare.*

Pentru ca funcţia reală mărginită f să fie integrabilă Riemann pe *compactul* $[a, b]$ trebuie ca limita sumelor integrale Riemann pentru $\|\Delta\| \to 0$ să fie finită şi să nu depindă de alegerea punctelor intermediare. Această limită se numeşte *integrala definită* şi se notează cu simbolul

$$\int_a^b f(x)dx,$$

deci putem scrie egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

În fizica matematică se întâlnesc atât integrale din funcţii nemărginite cât şi integrale pe domenii de integrare nemărginite.

Astfel de integrale se numesc *integrale improprii.*

Pentru a defini aceste tipuri de integrale nu este suficient să aplicăm o trecere la limită întro sumă integrală Riemann ci este necesar să folosim o trecere la limită suplimentară care să implice domeniul de integrare.

Pentru aceasta, domeniul iniţial de integrare, unde definiţia integrabilităţii Riemann nu se poate aplica, se înlocuieşte cu un subdomeniu pe care funcţia să fie integrabilă Riemann. Apoi, acest subdomeniu se extinde până coincide cu domeniul iniţial de integrare. Limita integralei luată pe subdomeniu, când acest subdomeniu tinde să devină mulţimea iniţială de definiţie a funcţiei, se numeşte *integrală improprie.*

Aceasta este ideea generală pe care se bazează definiţia integralelor improprii.

1.2 Definiţia integralei improprii

Fie elementele $a, b \in \overline{I\!R}$ cu proprietăţile $-\infty < a < b \leq +\infty$ şi

$$f : [a, b) \to I\!R, \tag{1.1}$$

o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a, t] \subset [a, b)$ şi nemărginită întro vecinătate a lui b dacă $b \in I\!R$.

Definiţia 1.2.1 *Limita în punctul $t = b$ a funcţiei*

$$F : [a, b) \to I\!R, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1.2}$$

se numeşte **integrală improprie cu limita superioară de integrare punct singular** *şi se notează cu simbolul*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.3}$$

Din această definiţie rezultă

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{t\to b} F(t) \;=\; \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx. \tag{1.4}$$

Definiţia 1.2.2 *Funcţia f se numeşte* **integrabilă în sens generalizat** *dacă există şi este finită limita funcţiei F pentru $t \to b$.*

Definiţia 1.2.3 *Dacă funcţia* (1.1) *este integrabilă în sens generalizat, spunem că integrala improprie* (1.3) *este* **convergentă***; dacă limita pentru $t \to b$ a funcţiei* (1.2) *este infinită sau nu există, integrala improprie* (1.3) *se numeşte* **divergentă***.*

Definiţia 1.2.4 *Prin* **natura unei integrale improprii** *se înţelege proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.*

Observaţia 1.2.1 *Fie $a_1 \in I\!R$ astfel încât $a < a_1 < b$. Egalitatea*

$$\int_a^t f(x)dx \;=\; \int_a^{a_1} f(x)dx \;+\; \int_{a_1}^t f(x)dx$$

implică faptul că integralele improprii $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ şi $\displaystyle\int_{a_1}^b f(x)dx$ sunt simultan convergente sau divergente. Astfel, când testăm convergenţa integralei improprii (1.3)*, o putem înlocui prin integrala improprie*

$$\int_{a_1}^b f(x)dx \tag{1.5}$$

În plus, dacă integrala improprie (1.3) *este convergentă, legătura sa cu integrala improprie* (1.5) *este*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^{a_1} f(x)dx \;+\; \int_{a_1}^b f(x)dx, \tag{1.6}$$

iar din (1.4) *şi* (1.6) *deducem*

$$\lim_{a_1\to b}\int_{a_1}^b f(x)dx = 0. \tag{1.7}$$

Dacă f este o funcţie continuă şi nenegativă pe segmentul $[a, b)$, atunci integralei improprii (1.3) i se poate da o interpretare geometrică. Considerăm regiunea Ω a planului Oxy limitată inferior de segmentul $[a, b)$, superior de graficul funcţiei f şi la stânga de segmentul închis paralel la axa Oy având extremităţile în punctele $A(a, 0)$ şi $A'(a, f(a))$. Definiţia măsurii sau a carabilităţii şi noţiunea de arie a unei figuri plane este inaplicabilă mulţimii Ω deoarece aceasta este nemărginită. Un segment paralel cu extremitatea stângă a domeniului Ω cu extremităţile în punctele $M(t, 0)$ şi $M'(t, f(t))$ taie din Ω trapezul curbiliniu $AMM'A'$ situat în stânga liniei considerate a cărui arie este integrala definită (1.2). Este natural să extindem noţiunea de carabilitate la domenii nemărginite dacă aria trapezului $AMM'A'$ tinde la o limită finită când $t \to b$. În acest caz spunem că Ω este *carabil*, iar limita de mai sus se numeşte *aria domeniului* Ω. Această arie se exprimă prin integrala improprie (1.3).

În mod analog se introduce *integrala improprie cu limita inferioară punct singular.*

Definiţia 1.2.5 *Simbolul*

$$\int_a^b g(x)dx \tag{1.8}$$

reprezintă notaţia pentru **integrala improprie cu limita inferioară punct singular** *dacă funcţia*

$$g : (a, b] \to \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b < +\infty \tag{1.9}$$

este integrabilă Riemann pe orice compact $[t, b] \subset (a, b]$ *şi nemărginită când* $a \in \mathbb{R}$.

Definiţia 1.2.6 *Funcţia* (1.9) *se numeşte* **integrabilă în sens generalizat** *sau, altfel spus, integrala improprie* (1.8) *este* **convergentă** *dacă există şi este finită limita funcţiei*

$$G : (a, b] \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \int_t^b g(x)dx \tag{1.10}$$

pentru $t \to a$. *În acest caz, simbolul* (1.8) *reprezintă numărul real*

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{t\to a} G(t) = \lim_{t\to a} \int_t^b g(x)dx. \tag{1.11}$$

Dacă funcţia (1.10) *nu are limită în* $t = a$, *sau limita* (1.11) *este infinită sau nu există, integrala improprie* (1.8) *se numeşte* **divergentă**.

Pentru integrala improprie cu limita inferioară punct singular au loc rezultate analoage celor din (1.6) şi (1.7), adică dacă (1.8) este convergentă, atunci integrala improprie $\int_a^{a_1} g(x)dx$ este convergentă oricare ar fi $a_1 \in (a, b]$ şi:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{a_1} g(x)dx + \int_{a_1}^b g(x)dx;$$

$$\lim_{a_1 \to a} \int_a^{a_1} g(x)dx = 0.$$

Definiţia 1.2.7 *Simbolul matematic*

$$\int_a^b h(x)dx \tag{1.12}$$

se numeşte integrală improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare dacă funcţia

$$h : (a, b) \to I\!R, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty \tag{1.13}$$

este integrabilă Riemann pe orice compact $[u, v] \subset (a, b)$ *şi nemărginită când cel puţin una din limitele de integrare este finită.*

Definiţia 1.2.8 *Funcţia h din* (1.13) *este* **integrabilă în sens generalizat** *sau, integrala improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare* (1.12) *este* **convergentă***, dacă pentru o alegere oarecare a punctului* $c \in (a, b)$ *integralele improprii:*

$$\int_a^c h(x)dx; \quad \int_c^b h(x)dx, \tag{1.14}$$

sunt convergente şi

$$\int_a^b h(x) = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx.$$

Dacă cel puţin una din integralele improprii (1.14) *este divergentă, atunci integrala improprie* (1.12) *este* **divergentă***.*

Teorema 1.2.1 *Integrala improprie* (1.12) *este convergentă dacă şi numai dacă limitele*

$$\lim_{u \to a} \int_u^c h(x)dx, \quad \lim_{t \to b} \int_c^t h(x)dx \tag{1.15}$$

există şi sunt finite. În acest caz, valoarea integralei improprii (1.12) *este*

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{\substack{u \to a \\ t \to b}} \int_u^t h(x)dx. \tag{1.16}$$

Demonstraţie. Integralele improprii (1.14) sunt convergente dacă şi numai dacă limitele (1.15) există şi sunt finite. Pe de altă parte

$$\int_u^t h(x)dx = \int_u^c h(x)dx + \int_c^t h(x)dx. \tag{1.17}$$

Trecând la limită în (1.17) pentru $u \to a$ şi $t \to b$, din notaţia

$$\lim_{u\to a}\int_u^c h(x)dx + \lim_{t\to b}\int_c^t h(x)dx = \lim_{\substack{u\to a\\ t\to b}}\int_u^t h(x)dx$$

şi Definiţia 1.2.8 rezultă concluziile teoremei. ∎

Observaţia 1.2.2 *Studiul integralelor improprii cu limita inferioară punct singular se reduce la studiul celor cu limita superioară punct singular.*

Într-adevăr, funcţia

$$\tilde{f} : [-b,-a) \to I\!R, \qquad -\infty < -b < -a \le +\infty, \qquad \tilde{f}(x) \;=\; g(-x)$$

este integrabilă Riemann pe compactul $[-b,-t] \subset [-b,-a)$ şi avem

$$\int_t^b g(x)dx \;=\; \int_{-b}^{-t} g(-u)\,du \;=\; \int_{-b}^{-t} \tilde{f}(u)\,du. \tag{1.18}$$

Trecând la limită pentru $t \to a$ în (1.18), găsim relaţia

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{-b}^{-a} \tilde{f}(x)dx,$$

care arată că integrala improprie cu limita inferioară punct singular din (1.8) este egală cu o integrală improprie având limita superioară punct singular. ∎

Observaţia 1.2.3 *Este posibil ca întro integrală improprie să existe şi alte puncte singulare nesituate în una sau ambele limite de integrare.Astfel, simbolul*

$$\int_a^b \varphi(x)dx \tag{1.19}$$

reprezintă o integrală improprie cu singularităţile în punctele $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$, c_n *unde*

$$-\infty \le a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b \le +\infty,$$

dacă funcţia reală de variabilă reală

$$\varphi : (a,b) \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}\} \to I\!R$$

este integrabilă pe orice compact inclus în oricare din intervalele (c_{k-1}, c_k), $k = \overline{1,n}$.

Dacă toate integralele improprii

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi(x)dx, \qquad k = \overline{1,n}$$

sunt convergente, atunci integrala improprie (1.19) este convergentă şi

$$\int_a^b \varphi(x)dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi(x)dx.$$

Definiţia 1.2.9 *Următoarele integrale improprii din funcţii mărginite definite pe intervale nemărginite:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.20}$$

se numesc integrale improprii **de prima speţă** *sau* **de tipul întâi**.

Conform Observaţiei 1.2.2, oricare din ultimele două integrale improprii (1.20) se reduce la una în care limita superioară de integrare este $+\infty$.

Definiţia 1.2.10 *Integralele improprii ale funcţiilor nemărginite definite pe intervale mărginite se numesc integrale improprii* **de a doua speţă** *sau* **de tipul al doilea**.

Aceste integrale au singularităţi finite situate în una sau ambele limite de integrare. Singularităţile, în număr finit, pot fi situate de asemeni în intervalul finit de integrare (a, b).

Definiţia 1.2.11 *Integralele improprii de forma* (1.12) *în care* $-\infty < a < b = +\infty$ *sau* $-\infty = a < b < +\infty$ *se numesc integrale improprii* **de speţa a treia**.

Observaţia 1.2.4 *O integrală improprie de speţa a treia este egală cu suma dintre o integrală improprie de prima speţă şi o alta de speţa a doua.*

Exemplul 1.2.1 *Integrala improprie de prima speţă* $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ *este divergentă.*

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \sin x dx = 1 - \lim_{t \to +\infty} \cos t$$

Deoarece funcţia cosinus nu are limită în punctul de la infinit, rezultă că această integrală improprie de primul tip este divergentă. ■

Exemplul 1.2.2 *Integrala improprie de primul tip cu ambele limite puncte singulare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

este convergentă şi valoarea sa este egală cu π.

Într-adevăr, limita din (1.16) există şi este finită deoarece

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ u \to -\infty}} \int_u^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{u \to -\infty \\ t \to +\infty}} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} u) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Prin urmare, această integrală improprie este convergentă şi valoarea sa este π. ■

Exemplul 1.2.3 *Integrala improprie de speţa a doua cu ambele limite puncte singulare*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

este convergentă, iar valoarea sa este π.

Într-adevăr,

$$\lim_{\substack{u \to -1 \\ t \to 1}} (\arcsin t - \arcsin u) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Acest rezultat, împreună cu Teorema 1.2.1, demonstrează că integrala improprie considerată este convergentă şi are valoarea π. ■

În exemplele următoare sunt prezentate integrale improprii utilizate în criteriile de comparaţie pentru testarea naturii unor integrale improprii.

Exemplul 1.2.4 *Integrala improprie de prima speţă*

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx, \tag{1.21}$$

unde $C \in I\!R$ şi $a > 0$ sunt constante date, este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Într-adevăr, avem

$$\int_a^t \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \ln \dfrac{t}{a}, & \text{pentru} \quad \alpha = 1 \\ C \dfrac{t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

şi prin urmare,

$$I(\alpha) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \text{pentru} \quad \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{pentru} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Rezultatele găsite arată că integrala improprie considerată este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$, iar când este convergentă, valoarea integralei este $\dfrac{C}{(\alpha - 1)a^{1-\alpha}}$. ■

Exemplul 1.2.5 *Integralele improprii de speţa a doua:*

$$I_1(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx; \quad I_2(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx, \tag{1.22}$$

prima cu limita superioară punct singular, iar a doua cu singularitatea în limita inferioară, sunt convergente pentru $\alpha < 1$ şi divergente dacă $\alpha \geq 1$.

Într-adevăr, din

$$\int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\Big(\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-t)^{\alpha-1}}\Big) & \text{dacă} \quad \alpha \neq 1 \\ -\ln(b-t) + \ln(b-a) & \text{dacă} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

prin trecere la limită pentru $t \to b$, obţinem

$$\lim_{t\to b}\int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \text{dacă} \quad \alpha<1 \\ +\infty, & \text{dacă} \quad \alpha\geq 1, \end{cases}$$

rezultat care demonstrează afirmaţiile referitoare la prima integrală.

În mod similar se deduce

$$\lim_{u\to a}\int_u^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă} \quad \alpha\geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}. & \text{dacă} \quad \alpha<1 \end{cases}$$

Din cele deduse mai sus rezultă că în cazul $\alpha < 1$, ambele integrale (1.22) sunt convergente, iar valorile lor sunt

$$I_1(\alpha) = I_2(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Pentru $\alpha \geq 1$, ambele integrale sunt divergente. ■

1.3 Formula Leibniz–Newton

Teorema 1.3.1 *Dacă funcţia $f : [a,b) \to I\!R$, integrabilă Riemann pe orice compact $[a,t] \subset [a,b)$, admite o primitivă continuă $\Phi : [a,b) \to I\!R$ pentru care există limita în $t = b$, atunci integrala improprie* (1.3) *este convergentă şi valoarea sa este*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b}\Phi(t) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.23}$$

Demonstraţie. Din ipotezele teoremei rezultă că pe orice compact $[a,t] \subset [a,b)$ are loc formula Leibniz–Newton de calcul a unei integrale definite

$$\int_a^t f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^t = \Phi(t) - \Phi(a), \quad t \in [a,b). \tag{1.24}$$

Din (1.24) şi (1.4) rezultă că integrala improprie (1.3) este convergentă dacă şi numai dacă există şi este finită limita în $t = b$ a funcţiei Φ. Dacă se introduce notaţia

$$\lim_{t\to b}\Phi(t) = \Phi(b) = \begin{cases} \Phi(b-0), & \text{dacă} \quad b \in I\!R, \\ \Phi(+\infty), & \text{dacă} \quad b = +\infty, \end{cases}$$

rezultă că pentru calculul unei integrale improprii cu limita superioară punct singular se poate utiliza formula (1.23) care se numeşte *formula Leibniz–Newton pentru calculul integralelor improprii.* ■

Formule analoage se pot scrie şi pentru integralele improprii cu limita inferioară punct singular sau cu ambele limite de integrare puncte singulare.

Exerciţiul 1.3.1 *Să se studieze integrala improprie* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2}$.

Soluţie. O primitivă a funcţiei

$$f : [2,\infty) \to I\!R, \quad f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

este funcţia

$$\Phi : [2,\infty) \to I\!R, \quad \Phi(x) = \operatorname{arctg}(x-1).$$

Această funcţie are limită în $+\infty$ şi limita $\Phi(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$. Conform Teoremei 1.3.1, rezultă că valoarea integralei improprii este

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2} = \Phi(\infty) - \Phi(2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

■

1.4 Proprietăţi ale integralelor improprii

Având în vedere (1.4), deducem că proprietăţile integralelor improprii decurg din cele ale integralelor definite.

Teorema 1.4.1 *Mulţimea funcţiilor integrabile în sens generalizat pe* $[a, b)$ *este un spaţiu liniar real.*

Demonstraţie. Fie $f_1 : [a, b) \to I\!R$ şi $f_2 : [a, b) \to I\!R$ funcţii integrabile în sens generalizat şi λ_1, λ_2 numere reale arbitrare. Pe compactul $[a, t] \subset [a, b)$ are loc egalitatea

$$\int_a^t (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_a^t f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^t f_2(x) dx.$$

Trecând la limită în această egalitate, constatăm că funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : [a, b) \to I\!R$ este integrabilă în sens generalizat şi valoarea integralei improprii a acestei funcţii pe intervalul $[a, b)$ este

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

Acest rezultat demonstrează teorema. ■

Teorema 1.4.2 *Dacă integralele improprii cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^b f_1(x) dx, \quad \int_a^b f_2(x) dx \tag{1.25}$$

sunt convergente şi

$$f_1(x) \leq f_2(x), \quad x \in [a, b), \tag{1.26}$$

atunci are loc inegalitatea

$$\int_a^b f_1(x) dx \ \leq \ \int_a^b f_2(x) dx. \tag{1.27}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (1.26) şi o proprietate a integralei definite implică

$$\int_a^t f_1(x) dx \leq \int_a^t f_2(x) dx,$$

de unde, după trecerea la limită pentru $t \to b$ şi folosirea faptului că integralele improprii (1.25) sunt convergente, rezultă (1.27). ■

Teorema 1.4.3 *Dacă una din integralele improprii* (1.25) *este convergentă şi cealaltă este divergentă, suma lor este divergentă.*

Demonstraţie. Presupunând prin absurd că suma integralelor improprii (1.25) este integrală improprie convergentă, conform Teoremei 1.4.1, diferenţa dintre această sumă şi integrala improprie convergentă este o integrală improprie convergentă, fapt ce contrazice ipoteza. ■

Observaţia 1.4.1 *Dacă integralele improprii* (1.25) *sunt divergente, suma lor poate fi o integrală improprie divergentă sau convergentă.*

Într-adevăr, integralele improprii de speţa întâi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1}dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+2}dx$$

sunt divergente dar suma lor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1}dx + \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+2}dx$$

este convergentă căci

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \lim_{t\to+\infty} \Big(\int_0^t \frac{1}{x+1}dx + \int_0^t \frac{-1}{x+2}dx\Big) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \Big(\ln\frac{x+1}{x+2}\Big)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty} \ln\frac{t+1}{t+2} + \ln 2 = \ln 2,$$

valoarea sa fiind $\ln 2$.

Considerând integralele improprii $\int_0^{\infty} \sin^2 x dx$ şi $\int_0^{\infty} \cos^2 x dx$, ambele divergente după cum se constată simplu folosind Definiţia 1.2.2, suma lor, $\int_0^{\infty} dx$, este o integrală improprie divergentă.

Prin urmare, suma a două integrale improprii divergente poate fi sau o integrală improprie convergentă sau una divergentă. ■

1.5 Reducerea integralelor improprii la şiruri şi serii numerice

Convergenţa unei integrale improprii cu limita superioară punct singular se poate reduce la convergenţa unui şir numeric sau a unei serii de numere reale. Pentru aceasta este suficient să aplicăm definiţia cu şiruri a limitei în punctul $t = b$ a funcţiei

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1.28}$$

de a cărei valoare depinde natura integralei improprii cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.29}$$

Observaţia 1.5.1 *Reamintim că funcţia* $F(t)$ *are limită finită în punctul* $t = b$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de numere reale* $(t_n)_{n\geq 0}$, *cu proprietăţile*

$$t_0 = a, \quad a < t_n < b, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = b, \tag{1.30}$$

şirul numeric $(F(t_n))$ *are limită finită şi această limită nu depinde de alegerea şirului* (t_n).

Teorema 1.5.1 *Integrala improprie* (1.29) *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice şir de puncte* $(t_n)_{n\geq 0}$, *cu proprietăţile* (1.30), *şirul numeric*

$$\Big(\int_a^{t_n} f(x)dx\Big)_{n\geq 1} \tag{1.31}$$

este convergent la aceeaşi limită finită. Dacă integrala improprie (1.29) *este convergentă, limita şirului de numere reale* (1.31) *este egală cu valoarea integralei improprii.*

Demonstraţie. Termenul general al şirului (1.31) este valoarea în t_n a funcţiei F din (1.28).

Concluziile teoremei rezultă din Observaţia 1.5.1. ■

Observaţia 1.5.2 *Termenii şirului* (1.30) *sunt sumele parţiale ale seriei numerice*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)dx. \tag{1.32}$$

Teorema 1.5.2 *Condiţia necesară şi suficientă ca integrala improprie cu limita superioară punct singular* (1.29) *să fie convergentă este ca pentru orice alegere a şirului de puncte* (1.30), *seria numerică* (1.32) *să fie convergentă, iar suma sa să fie independentă de alegerea particulară a şirului. Dacă integrala* (1.29) *este convergentă, atunci valoarea sa este suma seriei* (1.32).

Observaţia 1.5.3 Dacă *funcţia* f *schimbă de semn de o infinitate de ori pe intervalul* $[a, b)$, *convergenţa seriei numerice* (1.32) *pentru o anumită alegere a şirului de puncte* (1.30) *nu implică, în caz general, convergenţa integralei improprii* (1.29) *cu limita superioară punct singular.*

Într-adevăr, integrala improprie de speţa întâi din Exemplul 1.2.1 este divergentă deşi seria

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\sin x dx$$

este convergentă deoarece toţi termenii sunt egali cu zero. ■

Teorema 1.5.3 *Integrala improprie cu limita superioară punct singular a unei funcţii* $f:[a,b)\to I\!R$ *care păstrează semn constant pe* $[a,b)$ *este convergentă dacă şi numai dacă seria numerică* (1.32) *converge pentru cel puţin o alegere a unui şir monoton crescător de tipul* (1.30).

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din teorema precedentă.

Să demonstrăm că are loc şi reciproca teoremei.

În acest sens să presupunem că $f(x)\geq 0$ pentru toate valorile lui $x\in[a,b)$ şi că seria numerică (1.32) este convergentă pentru un şir de puncte monoton crescător de tipul (1.30). Atunci şirul sumelor parţiale al seriei este monoton crescător şi tinde la o limită finită J care este suma seriei.

Vom demonstra că pentru orice altă alegere a şirului de puncte

$$(t'_m)_{m\geq 0},\quad t'_0=a,\quad a<t'_m<b,\quad \lim_{m\to+\infty}t'_m=b,$$

seria numerică corespunzătoare

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{t'_{m-1}}^{t'_m}f(x)dx \tag{1.33}$$

este convergentă şi suma sa este egală cu J.

Pentru a demonstra aceasta vom folosi sumele parţiale ale seriilor (1.32) şi (1.33). Deoarece J este totodată limita superioară a şirului sumelor parţiale ale seriei (1.32), rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există t_{n_0} astfel încât să aibă loc inegalitatea

$$J-\varepsilon<\int_a^{t_{n_0}}f(x)dx<J.$$

Să alegem numărul natural m_0 astfel încât pentru toţi $m\geq m_0$ să fie satisfăcută inegalitatea $t'_m\geq t_{n_0}$. Apoi, pentru orice t'_m există $t_{n_m}>t'_m$ şi prin urmare, inegalitatea

$$J-\varepsilon<\int_a^{t_{n_0}}f(x)dx\leq\int_a^{t'_m}f(x)dx\leq\int_a^{t_{n_m}}f(x)dx\leq J$$

are loc pentru toţi $m \geq m_0$, deoarece f este funcţie nenegativă. În consecinţă

$$\lim_{m\to+\infty}\int_a^{t'_m} f(x)dx = J,$$

care, în baza Teoremei 1.5.1, arată că integrala improprie cu limita superioară punct singular a unei funcţii pozitive pe intervalul de integrare este convergentă. ■

Exemplul 1.5.1 *Integrala improprie* $\int_1^{\infty} f(x)dx$, *unde*

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \textit{pentru} \quad n \leq x \leq n + \dfrac{1}{2^{2n}}, \qquad n \in I\!\!N^* \\ \\ 0 & \textit{pentru} \quad n + \dfrac{1}{2^{2n}} < x < n+1, \qquad n \in I\!\!N^* \end{cases} \tag{1.34}$$

este convergentă şi are valoarea 1.

Soluţie. Aplicând Teorema 1.5.3 pentru alegerea lui $t_n = n$, găsim

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

ceea ce arată că integrala improprie de speţa întâi

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

unde f este funcţia (1.34), este convergentă şi are valoarea 1. ■

Observaţia 1.5.4 *Exemplul de mai sus arată că chiar dacă funcţia f este nenegativă faptul că integrala improprie de prima speţă*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

este convergentă nu atrage că $f(x) \to 0$ când $x \to +\infty$.

Întradevăr, folosind criteriul de nonexistenţă a limitei unei funcţii întrun punct, rezultă că că funcţia definită prin (1.34) nu are limită în punctul de la infinit. ■

1.6 Criteriul integral al lui Cauchy

Teorema 1.6.1 *Dacă funcţia* $f : [1,+\infty) \to I\!R$, *integrabilă Riemann pe orice compact* $[1,t] \subset [1,\infty)$, *este pozitivă şi descrescătoare, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *şi integrala improprie de speţa întâi* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Deoarece f este funcţie descrescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$ avem

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \;\; x \in [k,k+1], \;\; k \in I\!N^*$$

şi deci, după integrarea pe compactul $[k,k+1]$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \;\; k \in I\!N^*. \tag{1.35}$$

Sumând inegalităţile (1.35) după $k = \overline{1,n}$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

adică,

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n, \tag{1.36}$$

unde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ este suma parţială de ordin n a seriei numerice

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n). \tag{1.37}$$

Din (1.36) rezultă că şirul sumelor parţiale (s_n) a seriei (1.37) este mărginit dacă şi numai dacă şirul de puncte

$$\Big(\int_1^{n} f(x)dx\Big) \tag{1.38}$$

este mărginit. Fiind şi monoton crescător, rezultă că şirul (s_n) este convergent, adică seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (1.38) este convergent, adică dacă şi numai dacă integrala improprie de primul tip $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă. ■

Exemplul 1.6.1 *Seria numerică cu termeni pozitivi*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}, \quad \alpha > 0,$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \in (0, 1]$.

Soluţie. Se aplică criteriul integral al lui Cauchy, unde funcţia f este

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}, \quad \alpha > 0, \quad x \in [2, +\infty).$$

Integrala improprie de care avem nevoie pentru a aplica criteriul este

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^{\alpha} x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}}.$$

Ultima integrală este de tipul (1.21) în care $a = \ln 2$ şi $C = 1$. Prin urmare, integrala este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă când $\alpha \leq 1$. Conform criteriului integral al lui Cauchy, seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \in (0, 1]$. ■

1.7 Metode de calcul ale integralelor improprii

Plecând de la observaţia că o integrală improprie se defineşte ca limită a unei integrale definite şi că pentru calculul acesteia din urmă se pot utiliza metode ca schimbarea de variabilă şi integrarea prin părţi, este natural să punem problema dacă aceste tehnici de calcul nu sunt aplicabile şi integralelor improprii.

1.7.1 Schimbarea de variabilă în integrala improprie

Teorema 1.7.1 *Dacă* $f : [a, b) \to I\!R, \quad -\infty < a < b \leq +\infty$, *este o funcţie integrabilă Riemann pe orice compact* $[a, t] \subset [a, b)$ *şi*

$$\tau \mapsto x = \varphi(\tau) \in I\!R, \quad \tau \in [\alpha, \beta), \quad -\infty < \alpha < \beta \leq +\infty,$$

este o funcţie strict crescătoare cu derivată continuă pe $[\alpha, \beta)$ *care satisface condiţiile:*

$$a = \varphi(\alpha); \quad \lim_{\tau \to \beta} \varphi(\tau) = b, \tag{1.39}$$

atunci integralele improprii:

$$\int_a^b f(x)dx; \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau$$

au aceeaşi natură. Dacă una din ele este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau$$

care se numeşte **formula schimbării de variabilă în integrala improprie**.

Demonstraţie. Fie $t \in [a, b)$ şi $u = \varphi^{-1}(t)$. Ţinând cont că intervalul compact $[\alpha, u] \subset [\alpha, \beta)$ este corespondentul prin aplicaţia φ^{-1} a compactului $[a, t] \subset [a, b)$, prin aplicarea formulei schimbării de variabilă în integrala definită, obţinem

$$\int_a^t f(x)dx = \int_\alpha^u f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau. \tag{1.40}$$

Din proprietăţile funcţiei φ rezultă că

$$\lim_{t \to b} \varphi^{-1}(t) = \beta. \tag{1.41}$$

Definiţia integralei improprii şi egalităţile (1.40), (1.41) demonstrează teorema. ■

Observaţia 1.7.1 *Teorema se extinde uşor la celelalte tipuri de integrale improprii prezentate în primul paragraf.*

Observaţia 1.7.2 *Funcţia* φ *care realizează schimbarea de variabilă întro integrală improprie poate fi strict descrescătoare, derivabilă şi cu derivată continuă pe* $(\alpha, \beta]$. *În acest caz, condiţiile* (1.39) *devin*

$$a = \varphi(\beta); \quad \lim_{\tau \to \alpha} \varphi(\tau) = b,$$

iar formula schimbării de variabilă este

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau.$$

Observaţia 1.7.3 *Este posibil ca în urma unei schimbări de variabilă o integrală improprie să treacă întro integrală proprie şi reciproc.*

Exemplul 1.7.1 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(y \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

unde y este un număr real pozitiv.

Soluţie. Pentru fiecare $y > 0$, funcţia

$$f : (-1,1) \to I\!R, \quad f(x) = \frac{\cos(y \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1),$$

este continuă, ca atare este integrabilă Riemann pe orice compact $[u,t] \subset (-1,1)$ şi putem spune că I este o integrală improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare. Funcţia

$$\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1,1), \quad x = \varphi(\tau) = \sin\tau$$

satisface condiţiile cerute de formula schimbării de variabilă în integrala improprie, iar

$$\lim_{\tau \to -\pi/2} \varphi(\tau) = -1, \quad \lim_{\tau \to \pi/2} \varphi(\tau) = 1.$$

Aplicarea formulei schimbării de variabilă conduce la

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(y \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y\tau \, d\tau = \frac{1}{y} \sin y\tau \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{y} \sin\frac{\pi y}{2}.$$

Schimbarea de variabilă folosită a transformat integrala improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare în integrală definită (proprie). ■

Exemplul 1.7.2 *Să se calculeze integrala definită*

$$J = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Soluţie. Deoarece integrantul este funcţie periodică de perioadă $\frac{\pi}{2}$, avem

$$J = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx. \tag{1.42}$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = \tau$. Prin urmare, funcţiile φ şi φ' sunt

$$\varphi, \varphi' : [0, +\infty) \to I\!R, \quad \varphi(\tau) = \operatorname{arctg} \tau, \quad \varphi'(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}.$$

Prin această schimbare de variabilă, intervalul finit de integrare $[0, \frac{\pi}{2}]$ se transformă în intervalul infinit $[0, +\infty)$ şi

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tau^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\tau^2}{1+\tau^2}; \quad f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) = 4\frac{1+\tau^2}{1+\tau^4}.$$

Folosind schimbarea de variabilă menţionată, integrala proprie (1.42) devine integrala improprie de speţa întâi dintr–o funcţie raţională

$$J = 4\int_0^{+\infty} \frac{1+\tau^2}{1+\tau^4}\,d\tau. \tag{1.43}$$

Funcţia de integrat din (1.43) se descompune în fracţiile simple

$$\frac{4(1+\tau^2)}{1+\tau^4} = \frac{2}{\tau^2 + \tau\sqrt{2} + 1} + \frac{2}{\tau^2 - \tau\sqrt{2} + 1},$$

iar aceste fracţii simple admit ca primitive funcţiile

$$2\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\tau\sqrt{2} + 1), \quad 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\tau\sqrt{2} - 1)$$

care au limite finite în $\tau = +\infty$ şi fiecare din aceste limite este egală cu $\frac{\pi}{2}$.

Prin urmare, aplicând formula Leibniz–Newton (1.23), se găseşte că valoarea integralei proprii J este $J = \pi\sqrt{8}$. ■

Observaţia 1.7.4 *Studiul naturii unei integrale improprii pe un interval mărginit dintr–o funcţie nemărginită (integrală improprie de speţa a doua) se reduce la studiul naturii unei integrale improprii pe un interval nemărginit.*

Într-adevăr, schimbarea de variabilă

$$x = \varphi(\tau) = \frac{b\tau + a}{\tau + 1} \Longrightarrow \tau = \varphi^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-x},$$

efectuată în integrala improprie de speţa a doua cu limita superioară punct singular din funcţia f conduce la integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^{+\infty} f\Big(\frac{b\tau + a}{\tau + 1}\Big)\frac{d\tau}{(\tau+1)^2}$$

fapt care este evident.

Conform acestei observaţii, mai departe se pot studia doar integralele improprii de speţa întâi. ■

1.7.2 Integrarea prin părţi în integrala improprie

Teorema 1.7.2 *Dacă funcţiile*

$$u, v : [a, b) \to I\!R, \quad -\infty < a < b \leq +\infty,$$

admit derivate continue pe $[a, b)$, *iar limita* $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x)$, *notată cu*

$$\lim_{x\to b} u(x)v(x) = u(b)v(b),$$

există şi este finită, atunci integralele improprii

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx, \qquad \int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{1.44}$$

au aceeaşi natură. Dacă una din integralele (1.44) *este convergentă, atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx \;=\; u(x)v(x)\Big|_a^b \;-\; \int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{1.45}$$

care se numeşte **formula integrării prin părţi în integrala improprie**.

Demonstraţie. În ipotezele teoremei, are loc formula integrării prin părţi pe compactul $[a, t] \subset [a, b)$

$$\int_a^t u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^t - \int_a^t u'(x)v(x)dx. \tag{1.46}$$

Trecând la limită pentru $t \to b$ în (1.46), rezultă că integralele improprii (1.44) au aceeşi natură şi, în plus, are loc (1.45). ■

Exerciţiul 1.7.1 *Să se calculeze următoarele integrale improprii de speţa a doua*

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx,\qquad J=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x dx. \tag{1.47}$$

Soluţie. Prima integrală are limita inferioară punct singular iar cea de a doua are singularitatea în limita superioară, ambele singularităţi fiind înţelese în sensul că funcţia de integrat este nemărginită în vecinătăţi ale acestor limite de integrare.

Integrarea prin părţi a primei integrale conduce la

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx=-\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{tg} x}dx. \tag{1.48}$$

De remarcat că integrala din membrul doi al relaţiei (1.48) este proprie căci funcţia de integrat $\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$ este continuă pe intervalul $(0,\pi/2)$ şi are limite finite în extremităţi, deci este prelungibilă prin continuuitate la compactul $[0,\pi/2]$. Acest rezultat arată că integrala improprie I este convergentă. La fel se demonstrează că şi J este integrală improprie convergentă.

Integralele I şi J sunt egale deoarece după efectuarea substituţiei $x=\pi/2-t$ în prima integrală se obţine cea de a doua integrală. Apoi,

$$2I=I+J=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{\sin 2x}{2}=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x dx. \tag{1.49}$$

Efectuând schimbarea de variabilă $2x=u$ în ultima integrală din (1.49), obţinem

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin u du. \tag{1.50}$$

Pe de altă parte, proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei definite conduce la

$$\int_0^{\pi}\ln\sin u du=\int_0^{\pi/2}\ln\sin u du+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin u du. \tag{1.51}$$

Dacă în ultima integrală din (1.51) efectuăm schimbarea de variabilă $u=\pi-x$, găsim

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin u\, du=-\int_{\pi/2}^{0}\ln\sin x dx=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx=I. \tag{1.52}$$

Din (1.49), (1.50) şi (1.52) deducem

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

din care, ţinând cont şi de faptul că $I = J$, avem în final

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx \;=\; \int_0^{\pi/2} \ln\cos x dx \;=\; -\frac{\pi}{2}\ln 2. \tag{1.53}$$

Aşadar, valoarea comună a celor două integrale considerate este $\frac{\pi}{2}\ln 2.$ ■

Exerciţiul 1.7.2 *Pornind de la integrala I din* (1.47) *şi folosind cele două metode de calcul ale integralelor improprii, să se determine valoarea integralei*

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

Soluţie. Schimbarea de variabilă $\sin x = t$ în integrala I din (1.47) arataă că

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 (\ln t)(\arcsin t)' dt,$$

iar integrarea prin părţi în ultima integrală conduce la

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = (\ln t)(\arcsin t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}\, dt. \tag{1.54}$$

Folosind (1.53) şi (1.54) se găseşte

$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

cu menţiunea că integrala a cărei valoare am determinat–o este proprie, singularitatea în origine fiind aparentă deoarece funcţia continuă $t \mapsto \dfrac{\arcsin t}{t}$, $t \in (0,1]$ poate fi prelungită prin continuitate la compactul $[0,1]$. ■

1.8 Testul lui Cauchy de convergenţă a integralelor improprii

Convergenţa unei integrale improprii cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b} F(t) = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx \tag{1.55}$$

este echivalentă cu existenţa limitei în punctul $t = b$ a funcţiei F. Conform teoremei Bolzano–Cauchy, care asigură existenţa limitei finite într-un punct de acumulare a domeniului de definiţie a unei funcţii reale de variabilă reală, funcţia F are limită finită în punctul $t = b$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b(\varepsilon) \in [a, b)$ astfel încât

$$|F(t') - F(t'')| < \varepsilon \qquad (\forall)\ t' \in (b(\varepsilon), b) \quad \text{şi} \quad (\forall)\ t'' \in (b(\varepsilon), b). \tag{1.56}$$

Teorema 1.8.1 (**Testul lui Cauchy de convergenţă al unei integrale improprii cu limita superioară punct singular**) *Integrala improprie* (1.55) *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $b(\varepsilon) \in [a, b)$ *astfel încât inegalitatea*

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| < \varepsilon \tag{1.57}$$

are loc pentru orice $t', t'' \in (b(\varepsilon), b)$.

Demonstraţie. Convergenţa integralei improprii (1.55) este stabilită de comportarea valorilor funcţiei

$$F : [a, b) \to I\!R, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1.58}$$

în vecinătatea punctului $t = b$. Aplicând teorema lui Bolzano–Cauchy în care funcţia F este (1.58), din (1.55) şi (1.56) rezultă concluzia teoremei. ∎

Observaţia 1.8.1 *Inegalitatea* (1.57) *este echivalentă cu condiţia*

$$\lim_{\substack{t'\to b\\ t''\to b}} \int_{t'}^{t''} f(x)dx = 0. \tag{1.59}$$

Exercițiul 1.8.1 *Folosind testul de convergență al lui Cauchy să se demonstreze că integrala improprie de speța întâi cu limita superioară punct singular*

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \tag{1.60}$$

este convergentă. Această integrală se numește **integrala lui Dirichlet**.

Soluție. Să remarcăm întâi că singularitatea în limita inferioară a acestei integrale este aparentă căci funcția

$$f_1:(0,+\infty)\to I\!R,\quad f_1(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x>0, \tag{1.61}$$

poate fi prelungită prin continuitate luând pe 1 ca valoare în $x=0$ a funcției f, prelungirea prin continuuitate a funcției f_1. Valoarea în $x=0$ a funcției f este limita în origine a funcției f_1 din (1.61).

Atunci funcția

$$f:[0,+\infty)\to I\!R,\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{pentru}\quad x>0,\\ 1 & \text{pentru}\quad x=0\end{cases}$$

este continuă pe întreg domeniu de definiție deci se poate vorbi de integrala improprie (1.60).

Evaluarea integralei de tipul (1.59) folosind metoda integrării prin părți conduce la

$$\int_{t'}^{t''}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\cos t'}{t'}-\frac{\cos t''}{t''}-\int_{t'}^{t''}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Prin urmare,

$$\Big|\int_{t'}^{t''}\frac{\sin x}{x}dx\Big|\le\frac{1}{t'}+\frac{1}{t''}+\Big|\int_{t'}^{t''}\frac{|\cos x|}{x^2}dx\Big|\le$$

$$\le\frac{1}{t'}+\frac{1}{t''}+\Big|\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^2}\Big|\le\frac{2}{t'}+\frac{2}{t''}\to 0$$

pentru $t'\to+\infty$ și $t''\to+\infty$. Deci, în baza părții a doua a testului lui Cauchy de convergență a unei integrale improprii, integrala improprie de speța întâi (1.60) este convergentă. Mai târziu vom vedea că valoarea integralei lui Dirichlet este $\dfrac{\pi}{2}$. ■

De remarcat că aplicarea testului lui Cauchy la o integrală improprie concretă este laborioasă, în schimb, în multe aplicaţii, acest test este folosit pentru stabilirea unor condiţii suficiente (criterii) de convergenţă.

Criteriile de convergenţă pe care le vom demonstra se vor referi la integrale improprii cu limita superioară punct singular, şi aceasta pentru că studiul oricărui alt tip de integrală improprie, printr–o schimbare de variabilă adecvată, se reduce la studiul uneia cu singularitatea în limita superioară.

Înainte de a trece la prezentarea acestor criterii vom introduce noţiunea de *integrală improprie absolut convergentă* care este asemănătoare noţiunii de serie numerică absolut convergentă.

1.9 Integrale improprii absolut convergente

Definiţia 1.9.1 *Fie* $f : [a, b) \to I\!R$ *o funcţie integrabilă în sens generalizat pe intervalul* $[a, b)$ *şi integrala improprie cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.62}$$

Integrala improprie (1.62) *se numeşte* **absolut convergentă** *dacă integrala improprie*

$$\int_a^b |f(x)|dx \tag{1.63}$$

este convergentă.

Teorema 1.9.1 *Dacă integrala improprie* (1.62) *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Demonstraţie. Într-adevăr, integrala (1.63) fiind convergentă, rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $b(\varepsilon)$ astfel încât să avem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big| < \varepsilon, \ (\forall)\ t', t'' > b(\varepsilon). \tag{1.64}$$

Însă, întotdeauna avem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| \leq \Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big|. \tag{1.65}$$

Inegalităţile (1.64) şi (1.65) implică

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| \leq \Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big| < \varepsilon\ (\forall)\ t', t'' > b(\varepsilon).$$

Fiind îndeplinite condiţiile testului lui Cauchy pentru integrala improprie (1.62), aceasta este convergentă şi teorema este demonstrată. ■

Observaţia 1.9.1 *Convergenţa integralei improprii* (1.62) *nu implică convergenţa absolută a sa, cu alte cuvinte reciproca Teoremei* 1.9.1 *nu este adevărată.*

Pentru a justifica această afirmaţie este suficient să dăm un exemplu. Folosind testul de convergenţă al lui Cauchy s–a demonstrat că integrala improprie de speţa întâi (1.60) este convergentă. Demonstrăm că integrala modulului

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

este divergentă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria numerică

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \tag{1.66}$$

este divergentă fapt ce se poate constata prin aplicarea criteriului de comparaţie pentru seriile numerice cu termeni pozitivi. Întradevăr, pentru $n \geq 1$, avem

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)}\Big|\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin x dx\Big| = \frac{2}{\pi(n+1)}, \tag{1.67}$$

iar seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tag{1.68}$$

este divergentă deoarece diferă de seria armonică prin factorul constant $\dfrac{2}{\pi}$.

Divergenţa seriei numerice (1.68) şi inegalitatea (1.67), împreună cu criteriul de comparaţie pentru seriile numerice cu termeni pozitivi, atrage divergenţa seriei numerice (1.66). ■

Definiţia 1.9.2 *Integrala improprie* (1.62) *se numeşte* **semiconvergentă** *sau* **simplu convergentă** *dacă ea este convergentă dar nu este absolut convergentă.*

Observaţia 1.9.2 *O integrală improprie se poate plasa în unul din cazurile: integrală improprie semiconvergentă; integrală improprie absolut convergentă; integrală improprie divergentă.*

Observaţia 1.9.3 *Integrala improprie cu limita superioară punct singular* (1.62) *este absolut convergentă dacă şi numai dacă integrala improprie*

$$\int_{a_1}^{b} f(x)dx, \tag{1.69}$$

unde $a < a_1 < b$, *este absolut convergentă.*

Într-adevăr, dacă una din integralele improprii (1.62) şi (1.69) este absolut convergentă, în baza Definiţiei 1.9.1 şi a testului de convergenţă al lui Cauchy, avem

$$\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \to 0 \quad \text{pentru} \quad t', t'' \to b. \tag{1.70}$$

Dar relaţia (1.70) este condiţie necesară şi suficientă de convergenţă şi pentru cealaltă integrală improprie din cele două menţionate mai sus. ■

Exemplul 1.9.1 (Un exemplu de integrală semiconvergentă) *Pe segmentul* $[n-1, n] \subset I\!R$ *ca bază, se construieşte triunghiul isoscel* T_n, *de arie* $\dfrac{1}{n}$, *cu vârful în sus sau în jos, după cum* n *este număr întreg pozitiv impar sau par. Mulţimea laturilor egale ale triunghiurilor*

$$T_0, T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots$$

constituie graficul unei funcţii f *continue pentru* $x > 0$. *Să se arate că integrale improprie de prima speţă*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

este convergentă, în timp ce integrala

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$$

este divergentă.

Soluţie. Să considerăm un număr pozitiv x cu proprietatea că partea sa întreagă este $n-1$. Dacă n este par, putem scrie

$$\int_0^n f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{n-1} f(t)dt.$$

Dacă n este impar, avem inegalităţile contrarii

$$\int_0^{n-1} f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^n f(t)dt.$$

Dar, din interpretarea geometrică a integralei Riemann, avem

$$\int_0^{n-1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

dacă $x \to +\infty$, atunci $n \to +\infty$, iar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2,$$

deci integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă şi are valoarea $\ln 2$.

Pe de altă parte, este uşor de văzut că

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \int_0^x f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

deci integrala $\displaystyle\int |f(x)|dx$ este divergentă deoarece seria numerică $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

Prin urmare, integrala improprie de speţa întâi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ este semiconvergentă. ■

1.10 Criterii de comparaţie ale integralelor improprii

Pentru studiul convergenţei absolute şi divergenţei unor integrale improprii de regulă se folosesc unele criterii în care sunt implicate două integrale improprii ale căror natură este comparată, motiv pentru care aceste criterii sunt numite *criterii de comparaţie*.

Teorema 1.10.1 (**Criteriul general de comparaţie**) *Dacă funcţiile*

$$f, g : [a, b) \to I\!R, \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

sunt integrabile Riemann pe orice segment $[a, t] \subset [a, b)$, *atunci au loc următoarele afirmaţii:*

1. *dacă există* $a_1 \in [a, b)$ *astfel încât are loc inegalitatea*

$$|f(x)| \leq g(x), \quad x \in [a_1, b),$$

şi integrala improprie cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b g(x)dx \tag{1.71}$$

este convergentă, atunci integrala improprie (1.62) *este absolut convergentă;*

2. *dacă există* $a_2 \in [a, b)$ *astfel încât*

$$f(x) \geq g(x) \geq 0, \quad x \in [a_2, b)$$

şi integrala improprie (1.71) *este divergentă, atunci integrala improprie* (1.62) *este divergentă.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima dintre afirmaţii să observăm că pe orice segment $[t', t''] \subset [a_1, b)$ avem

$$\Big| \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \Big| \leq \Big| \int_{t'}^{t''} g(x)dx \Big|. \tag{1.72}$$

În baza inegalităţii (1.72) şi a testului lui Cauchy de convergenţă a unei integrale improprii, rezultă că integrala improprie (1.63) este convergentă, deci în baza Definiţiei 1.9.1 integrala improprie (1.62) este absolut convergentă.

Demonstraţia celei de a doua afirmaţii se face prin reducere la absurd. Presupunând prin absurd că integrala improprie (1.62) este convergentă, în baza primei afirmaţii a acestei teoreme rezultă că integrala improprie (1.71) este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Din această teoremă rezultă câteva consecinţe care sunt foarte utile şi uşor de manevrat în stabilirea naturii unor integrale improprii.

Corolarul 1.10.1 (**Criteriul de comparaţie cu limită**) *Dacă în integralele improprii* (1.62) *şi* (1.71), *cu limita superioară punct singular, funcţiile f şi g sunt nenegative pe segmentul* $[a, b)$ *şi există*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

atunci au loc următoarele afirmaţii:

1. *dacă integrala improprie* (1.71) *este convergentă şi* $0 \leq k < +\infty$, *atunci integrala improprie* (1.62) *este convergentă;*

2. *dacă integrala improprie* (1.71) *este divergentă şi* $0 < k \leq +\infty$, *atunci integrala improprie* (1.62) *este divergentă.*

Demonstraţie. Pentru a arăta că prima afirmaţie este adevărată să observăm că din definiţia în limbajul "$\varepsilon - \delta$" a limitei unei funcţii reale de o variabilă realaă, într-un punct de acumulare a domeniului ei de definiţie, rezultă că există $a_1 \in [a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \;\; x \in [a_1, b) \implies f(x) < (k + 1)g(x), \;\; x \in [a_1, b).$$

Convergenţa integralei (1.71) implică convergenţa integralei

$$\int_a^b (k + 1)g(x)dx$$

şi în baza punctului **1** al Teoremei 1.10.1 rezultă afirmaţia **1** din acest corolar.

Pentru a demonstra punctul **2** să considerăm $k' \in (0, k)$. Definiţia limitei asigură existenţa lui $a_2 \in [a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k', \;\; x \in [a_2, b) \implies f(x) > k'g(x), \;\; x \in [a_2, b). \tag{1.73}$$

Inegalităţile (1.73), divergenţa integralei improprii (1.71) şi ipoteza de la punctul **2** al Teoremei 1.10.1 conduc la divergenţa integralei (1.62). ■

Observaţia 1.10.1 *Dacă* $0 < k < +\infty$, *atunci integralele* (1.62) *şi* (1.71) *au aceeaşi natură.*

Corolarul 1.10.2 (**Criteriu special de comparaţie**) *Pentru integrala improprie de speţa întâi cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad a > 0 \tag{1.74}$$

sunt adevărate următoarele afirmaţii:

1. *dacă există* $a_1 \in [a, +\infty)$, $\alpha > 1$ *şi* $C \geq 0$ *finit astfel încât*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}, \ \ x \in [a_1, +\infty),$$

   atunci integrala improprie (1.74) *este absolut convergentă;*

2. *dacă există* $a_2 \in [a, +\infty)$, $\alpha \leq 1$ *şi* $C > 0$ *astfel încât*

$$|f(x)| \geq \frac{C}{x^\alpha}, \ \ x \in [a_2, +\infty),$$

   iar funcţia f *are semn constant pe* $[a_2, +\infty)$, *atunci integrala improprie* (1.74) *este divergentă.*

Demonstraţie. Punând $g(x) = \dfrac{C}{x^\alpha}$ în criteriul general de comparaţie şi ţinând cont de faptul că integrala improprie

$$\int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi $a > 0$, deducem că integrala (1.74) este absolut convergentă. Să observăm că presupunerea $a > 0$ nu este restrictivă căci dacă se întâmplă ca în (1.74) limita inferioară de integrare să nu fie pozitivă, atunci a poate fi înlocuit prin $c > 0$, iar integralele improprii $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)dx$ sunt simultan convergente sau divergente.

Pentru a demonstra cea de a doua afirmaţie, presupunem că există $a_2 > a$, $C > 0$ şi $\alpha \leq 1$ astfel încât $f(x) \geq \dfrac{C}{x^\alpha}$ pentru $x \in [a_2, +\infty)$. Dacă ţinem cont că în acest caz integrala improprie $\displaystyle\int_{a_2}^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx$ este divergentă şi aplicăm partea a doua a criteriului general de comparaţie, deducem că $\displaystyle\int_{a_2}^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă rezultat care, împreună cu Observaţia 1.2.1, implică divergenţa integralei improprii (1.74).

În cazul în care valorile funcţiei f sunt negative pe $[a_2, +\infty)$, dacă $f(x) \leq -\dfrac{C}{x^\alpha}$ pentru $x \geq a_2 \geq a > 0$, $C > 0$ şi $\alpha \leq 1$, putem pune $f^*(x) = -f(x)$.

Funcţia f^* are proprietatea $f^*(x) \geq \dfrac{C}{x^\alpha}$ pentru orice $x \geq a_2 \geq a > 0$.

În consecinţă, integrala $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^*(x)dx$ este divergentă, ceea ce atrage faptul că integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = -\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f^*(x)dx$$

este de asemeni divergentă, pentru că ultima limită nu există. ■

Corolarul 1.10.3 (**Criteriul de convergenţă în α cu limită**) *Dacă există limita*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)|\, x^\alpha = C,$$

atunci au loc următoarele afirmaţii:

1. *dacă* $0 \leq C < +\infty$ *şi* $\alpha > 1$, *integrala improprie* (1.74) *este absolut convergentă;*

2. *dacă* $0 < C \leq +\infty$, $\alpha \leq 1$ *şi funcţia* f *păstrează acelaşi semn pentru* $x \geq a_2$, *unde* $a_2 \geq a$, *integrala improprie* (1.74) *este divergentă.*

Demonstraţie. Din definiţia limitei cu vecinătăţi rezultă că dacă $0 \leq C < +\infty$, există $a_1 \geq a$ astfel încât au loc inegalităţile:

$$|f(x)|\, x^\alpha \leq 2C, \quad \text{pentru} \quad C > 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{2C}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty);$$

$$|f(x)|\, x^\alpha \leq 1, \quad \text{pentru} \quad C = 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty).$$

Prin urmare, în baza punctului **1** al Corolarului 1.10.2 integrala improprie de speţa întâi (1.74) este absolut convergentă.

Pentru a doua afirmaţie, dacă $0 < C \leq +\infty$ şi $\alpha \leq 1$, au loc următoarele inegalităţi

$$|f(x)|\, x^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{pentru} \quad C < +\infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| > \frac{C}{2x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty);$$

$$|f(x)|\, x^\alpha > 1, \quad \text{pentru} \quad C = \infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| > \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty),$$

de unde, conform celei de a doua afirmaţii din Corolarul 1.10.2, rezultă că integrala improprie (1.74) este divergentă. ■

Exemplul 1.10.1 *Integrala improprie*

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \tag{1.75}$$

unde $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ *este un polinom de gradul* m *cu coeficienţi reali, iar* $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ *un polinom real de grad* n*, care nu are rădăcini reale în intervalul de integrare* $[a, +\infty)$*, este convergentă dacă* $n > m + 1$.

Soluţie. Într-adevăr, funcţia de integrat se poate scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_m}{x^m}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \cdots + \dfrac{b_n}{x^n}}. \tag{1.76}$$

Efectuând produsul cu x^{n-m} în ambii membri ai relaţiei (1.76) şi trecând la limită pentru $x \to +\infty$, obţinem

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-m} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0},$$

care arată că dacă $n - m > 1$, integrala improprie (1.75) este convergentă. ■

Exerciţiul 1.10.1 *Să se studieze natura integralelor improprii de prima speţă:*

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}}, \qquad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Soluţie. Integrala I_1 este convergentă deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}} < \frac{1}{x^2}, \quad \text{iar} \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \quad \text{este convergentă.}$$

A doua integrală improprie este divergentă pentru că

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{x^{2/3}}{x} = \frac{1}{x^{1/3}}, \quad \text{iar integrala} \quad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/3}} \quad \text{este convergentă.}$$

În studiul naturii ambelor integrale s–a folosit criteriul special de comparaţie din Corolarul 1.10.2. ■

Exemplul 1.10.2 *Integralele improprii de prima speţă:*

$$\int_a^{+\infty} e^{-k^2x}\sin mx dx; \qquad I_2 = \int_a^{+\infty} e^{-k^2x}\cos mx dx$$

sunt absolut convergente deoarece:

$$|e^{-k^2x}\sin mx| \le e^{-k^2x}; \qquad |e^{-k^2x}\cos mx| \le e^{-k^2x},$$

iar integrala improprie de speţa a doua

$$\int_a^{+\infty} e^{-k^2x}dx$$

este convergentă în baza definiţiei naturii unei integrale improprii.

■

Comparând integrala improprie de speţa a doua

$$\int_a^b f(x)dx, \quad -\infty < a < b < +\infty, \tag{1.77}$$

cu punctul singular în limita superioară (respectiv în limita inferioară) cu integrala improprie deja studiată

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad \Big(\text{respectiv} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\Big),$$

convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \ge 1$, obţinem criterii de convergenţă în α ale integralelor improprii de speţa a doua.

Corolarul 1.10.4 (**Criteriu special de comparaţie pentru integrale improprii de speţa doua**) *Pentru integrala improprie* (1.77), *cu limita superioară* (*respectiv limita inferioară*) *punct singular, au loc următoarele afirmaţii:*

1. *dacă există* $a_1 \in [a,b)$, (*respectiv* $a_1 \in (a,b]$), $\alpha < 1$ *şi* $0 \leq C < +\infty$ *astfel încât*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^\alpha}, x \in [a_1, b)$$

$$\Big(\textit{respectiv } |f(x)| \leq \frac{C}{(x-a)^\alpha}, x \in (a, a_1]\Big),$$

atunci integrala improprie de speţa doua $\int_a^b f(x)dx$, *cu limita superioară* (*respectiv limita inferioară*) *punct singular, este absolut convergentă;*

2. *dacă există* $a_2 \in [a,b)$ (*respectiv* $a_2 \in (a,b]$), $\alpha \geq 1$ *şi* $C > 0$ *astfel încât*

$$|f(x)| > \frac{C}{(b-x)^\alpha}, x \in [a_2, b)$$

$$\Big(\textit{respectiv } \ |f(x)| > \frac{C}{(x-a)^\alpha}, x \in (a, a_2]\Big),$$

iar funcţia f *are semn constant pe* $[a_2, b)$ (*respectiv pe* $(a, a_2]$), *atunci integrala improprie de speţa doua* $\int_a^b f(x)dx$, *cu limita superioară* (*respectiv limita inferioară*) *punct singular, este divergentă.*

Demonstraţie. Punând $g(x) = \dfrac{C}{(b-x)^\alpha}$ $\Big($respectiv $g(x) = \dfrac{C}{(x-a)^\alpha}\Big)$ în criteriul general de comparaţie din Teorema 1.10.1 şi ţinând cont de faptul că integrala improprie

$$\int_a^b \frac{C}{(b-x)^\alpha}dx = \frac{C\,(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

$$\Big(\text{respectiv } \int_a^b \frac{C}{(x-a)^\alpha}dx = \frac{C\,(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\Big)$$

este convergentă pentru $\alpha < 1$ având valoarea scrisă alăturat, deducem că integrala improprie de speţa doua $\int_a^b f(x)dx$, cu limita superioară (respectiv limita inferioară) punct singular, este absolut convergentă şi deci prima afirmaţie este demonstrată.

Să presupunem că funcţia f este nenegativă. Atunci avem

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^\alpha} \Big(\text{respectiv } f(x) > \frac{C}{(x-a)^\alpha}\Big)$$

şi $\alpha \geq 1$ pentru toţi $x \in [a_2, b) \subset [a, b)$ (respectiv $x \in (a, a_2] \subset (a, b]$). În acest caz integrala improprie de speţa doua

$$\int_{a_2}^b \frac{C}{(b-x)^\alpha} dx \Big(\text{respectiv } \int_a^{a_2} \frac{C}{(x-a)^\alpha} dx\Big)$$

este divergentă. Aplicând partea a doua a criteriului general de comparaţie deducem că integrala improprie $\int_{a_2}^b f(x)dx \Big(\text{respectiv } \int_a^{a_2} f(x)dx\Big)$ este divergentă. Această ultimă integrală are aceeaşi natură cu integrala improprie de speţa doua cu limita superioară (respectiv limita inferioară) finită punct singular din (1.77), rezultat care implică divergenţa acestora.

În cazul în care funcţia f este negativă pe intervalul $[a_2, b) \subset [a, b)$ (respectiv $(a, a_2] \subset (a, b]$), dacă $f(x) < -\dfrac{C}{(b-x)^\alpha} \Big(\text{respectiv } f(x) < -\dfrac{C}{(x-a)^\alpha}\Big)$ pentru toţi $x \in [a_2, b)$ (respectiv $x \in (a, a_2]$), $C > 0$ şi $\alpha \geq 1$, introducem funcţia f^* ale cărei valori se determină după legea $f^*(x) = -f(x)$. Rezultă că $f^*(x) > \dfrac{C}{(b-x)^\alpha} \Big(\text{respectiv } f^*(x) > \dfrac{C}{(x-a)^\alpha}\Big)$ pentru orice $x \in [a_2, b)$ (respectiv $x \in (a, a_2]$) şi în consecinţă integrala $\int_a^b f^*(x)dx$ este divergentă. Prin urmare, integrala

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f^*(x)dx$$

este divergentă cea ce arată că şi cea de a doua afirmaţie din enunţul teoremei este adevărată. ■

Corolarul 1.10.5 (Criteriul de convergenţă în α cu limită a integralelor improprii de speţa doua) *În ipoteza că există limita*

$$\lim_{x\to b} |f(x)|\,(b-x)^\alpha = C,$$

au loc următoarele afirmaţii:

1. *dacă există* $a_1 \in [a, b)$, $\alpha < 1$ *şi* $0 \le C < +\infty$, *atunci integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este absolut convergentă;*

2. *dacă* $0 < C \le +\infty$, $\alpha \le 1$ *şi funcţia* f *păstrează acelaşi semn pentru* $x \in [a_2, b)$, *unde* $a \le a_2 < b$, *atunci integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este divergentă.*

Demonstraţie. Din definiţia limitei cu vecinătăţi rezultă că dacă $0 \le C < +\infty$, există $a_1 \ge a$ astfel încât au loc inegalităţile:

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha \le 2C, \quad \text{pentru} \quad C > 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| \le \frac{2C}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b);$$

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha \le 1, \quad \text{pentru} \quad C = 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| \le \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b).$$

Prin urmare, în baza punctului **1** al Teoremei 1.10.1 integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este absolut convergentă şi deci prima afirmaţie este demonstrată.

Dacă $0 < C \le +\infty$ şi $\alpha \le 1$, avem

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{pentru} \quad C < +\infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| > \frac{C}{2(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b);$$

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha > 1, \quad \text{pentru} \quad C = \infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| > \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b),$$

de unde, în baza punctului **2** al Teoremei 1.10.1, rezultă că integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este divergentă, ceea ce arată că şi a doua afirmaţie este adevarată. ■

Observaţia 1.10.2 *Se poate enunţa criteriul în α cu limită de convergenţă a integralelor improprii de speţa doua cu limita inferioară punct singular. Pentru aceasta, în Corolarul 1.10.5 şi demonstraţia lui, funcţia $(b-x)^\alpha$, acolo unde apare, se trece în $(x-a)^\alpha$, iar segmentul $[a_2, b)$ se înlocuieşte cu segmentul $(a, a_2] \subset (a, b]$.*

Exerciţiul 1.10.2 *Să se calculeze integrala improprie*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}.$$

Soluţie. Se observă că integrantul este nemărginit întro vecinătate a punctului $x = 1$. Scriem integrala ca suma dintre o integrală improprie de speţa doua, cu limita superioară punct singular, şi o alta, de speţa treia, care are ambele limite de integrare puncte singulare. Avem:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = I_1 + I_2.$$

Integrala I_1 este convergentă, deoarece există $\alpha = 1/2 < 1$ cu proprietatea

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Integrala de speţa treia se descompune în două integrale, prima de speţa doua cu limita inferioară, finită, punct singular, iar a doua, integrală improprie de speţa întâi cu limita superioară punct singular. Ambele integrale sunt convergente în baza criteriului în α cu limită căci:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = 1, \text{ pentru } \alpha = 2 > 1.$$

Fiind o sumă de integrale convergente rezultă că I_2 este convergentă. Prin urmare, integrala iniţială este convergentă. Integrala I_1 se reduce la integrala

I_2 prin schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{y}$. Putem spune că integrala dată este egală cu de două ori integrala I_2. Pentru calculul lui I_2 facem schimbarea de variabilă $x + 1 = \dfrac{1}{t}$. Găsim:

$$I_2 = -\int_{1/2}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = \sqrt{1-2t}\Big|_{1/2}^{0} = 1.$$

Rezultatele stabilite arată că valoarea integralei date este 2. ∎

1.11 Criterii de convergenţă ale integralelor improprii cu integrantul de semn variabil

Considerăm că funcţiile $f : [a, b) \to I\!\!R$ şi $h : [a, b) \to I\!\!R$, unde $-\infty < a < b \leq +\infty$, sunt alese astfel încât f şi $f \cdot h$ sunt funcţii integrabile Riemann pe orice compact $[a, t] \subset [a, b)$.

Teorema 1.11.1 (**Criteriul lui Abel**) *Dacă integrala improprie cu limita superioară punct singular* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă şi funcţia* h *este monotonă şi mărginită pe* $[a, b)$, *atunci integrala improprie*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx, \tag{1.78}$$

cu limita superioară punct singular, este convergentă.

Demonstraţie. Fie $M = \sup\{|h(x)| : \ x \in [a, b)\} < +\infty$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. Primele două ipoteze ale teoremei referitoare la funcţia f şi testul general de convergenţă al lui Cauchy implică existenţa unui $b(\varepsilon) \in [a, b)$ astfel încât

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{1.79}$$

oricare ar fi $t', t'' \in (b(\varepsilon), b)$. Se poate demonstra că există $\xi \in [t', t'']$ astfel încât

$$\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx = h(t')\int_{t'}^{\xi} f(x)dx + h(t'')\int_{\xi}^{t''} f(x)dx. \tag{1.80}$$

Luând modulul ambilor membri din (1.80) şi folosind pproprietăţile acestuia, obţinem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx\Big| \leq |h(t')|\Big|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\Big| + |h(t'')|\Big|\int_{\xi}^{t''} f(x)dx\Big|. \tag{1.81}$$

Deoarece $t', \xi, t'' \in (b(\varepsilon), b)$, din (1.79), (1.80) şi (1.81), deducem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx\Big| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

care, împreună cu testul de convergenţă al lui Cauchy, arată că integrala improprie (1.79) este convergentă. ■

Teorema 1.11.2 (**Criteriul lui Dirichlet**) *Dacă funcţia*

$$t \mapsto F(t) = \int_a^t f(x)dx, \quad t \in [a, b),$$

este mărginită, funcţia h este monotonă şi

$$\lim_{x\to b} h(x) = 0,$$

atunci integrala improprie (1.78), *cu limita superioară punct singular, este convergentă.*

Demonstraţie. Din prima ipoteză rezultă existenţa constantei $K > 0$ astfel încât

$$\Big|\int_a^t f(x)dx\Big| \leq K, \quad t \in [a, b). \tag{1.82}$$

Din cea de a doua ipoteză rezultă că oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $b(\varepsilon) \in [a, b)$ astfel încât

$$|h(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad x \in (b(\varepsilon), b). \tag{1.83}$$

Din (1.82) obţinem

$$\Big|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\Big| = \Big|\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{t'} f(x)dx\Big| \leq$$

$$\Big|\int_a^{\xi} f(x)dx\Big| + \Big|\int_a^{\xi} f(x)dx\Big| \leq 2K.$$

În mod asemănător demonstrăm mărginirea celelaltei integrale care intervine în membrul al doilea al relaţiei (1.80).

Aşadar, avem:

$$\Big|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\Big| \leq 2K; \quad \Big|\int_{\xi}^{t''} f(x)dx\Big| \leq 2K. \tag{1.84}$$

Atunci, din (1.81), (1.83) şi (1.84) rezultă

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx\Big| < \varepsilon, \ \ (\forall)\ t', t'' \in (b(\varepsilon), b). \tag{1.85}$$

Testul de convergenţă al lui Cauchy şi (1.85) demonstrează teorema. ∎

Exerciţiul 1.11.1 *Fie $a > 0$ şi $b \in I\!R^*$, numere reale arbitrare. Să se arate că integralele improprii*

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$$

sunt convergente şi să se determine valorile lor.

Soluţie. Pentru studiul naturii integralelor, folosim criteriul lui Dirichlet. Pentru ambele integrale, $h(x) = e^{-ax}$. Deoarece $a > 0$, rezultă că funcţia h este monoton descrescătoare şi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Pentru prima integrală, $f(x)$ din criteriul lui Dirichlet este $\cos bx$, iar pentru a doua $f(x) = \sin bx$. Rezultă că funcţiile $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ corespunzătoare sunt

$$F(x) = \int_0^x \cos bt dt = \frac{1}{b}\sin bx, \quad F(x) = \int_0^x \sin bt dt = \frac{1}{b}(1-\cos bx).$$

Funcţia $|F|(x)$ este mărginită de $\dfrac{1}{|b|}$ în primul caz, iar în cel de al doilea este mărginită de $\dfrac{2}{|b|}$.

Conform criteriului lui Dirichlet, ambele integrale sunt convergente.

Pentru calculul acestor integrale, aplicăm de două ori formula integrării prin părţi şi obţinem $I_1 = \dfrac{a}{a^2+b^2}, \quad I_2 = \dfrac{b}{a^2+b^2}.$ ∎

Exemplul 1.11.1 *Integrala* $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ *este convergentă pentru* $\alpha>0$ *deoarece, dacă în criteriul lui Dirichlet luăm* $f(x)=\sin x$ *şi* $h(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$*, avem*

$$|F(t)|=\Big|\int_{\pi}^{t}f(x)dx\Big|=\Big|\int_{\pi}^{t}\sin x dx\Big|=|\cos\pi-\cos t|\le 2$$

pentru $\pi\le t\le+\infty$*, iar* $h(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ *este o funcţie monoton descrescătoare care tinde la zero pentru* $t\to+\infty$ *şi* $\alpha>0$.

Exerciţiul 1.11.2 *Să se cerecteze natura integralelor* **Fresnel**[1]

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx,\qquad\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx,$$

care sunt utilizate în optică.

Soluţie. Punând $x^2=t$, obţinem

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt,\\ \int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx&=\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt.\end{aligned}\tag{1.86}$$

În criteriul lui Dirichlet, aplicat integralei improprii $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)h(t)dt$, luăm pe rând $f(t)=\sin t$ şi $f(t)=\cos t$, iar în ambele cazuri din (1.86), funcţia h o luăm de forma $h(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Funcţia h satisface ipotezele criteriului lui Dirichlet, iar un calcul simplu arată că valoarea absolută a funcţiei

$$u\mapsto F(u)=\int_0^{u}f(t)\,dt,\quad u\in(0,+\infty),$$

în ambele cazuri ale alegerii funcţiei f, este mărginită de $K=2$. Atunci, conform criteriului lui Dirichlet, ambele integrale sunt convergente. ■

[1]Fresnel, Augustin Jean (1788 – 1827), geometru şi optician francez

Exemplul 1.11.2 *Considerând integrala improprie*

$$\int_c^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin x}{x},$$

unde $c > 0$, *şi luând*

$$f(x) = \sin x, \quad h(x) = \frac{\ln x}{x},$$

în baza criteriului lui Dirichlet, constatăm convergenţa acesteia.

Exerciţiul 1.11.3 *Să se cerceteze natura integralelor*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \qquad \alpha > 0. \tag{1.87}$$

Soluţie. Din criteriul lui Dirichlet rezultă că integralele

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \tag{1.88}$$

sunt convergente pentru $\alpha > 0$. Într-adevăr, considerând că $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, unde $x \in [1, +\infty)$, constatăm că aceste funcţii satisfac ipotezele criteriului lui Dirichlet dacă $\alpha > 0$, astfel că integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este convergentă.

Analog se demonstrează că integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ este convergentă pentru $\alpha > 0$.

Pe de altă parte, deoarece pentru $x > 1$ avem

$$\Big|\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big| \le \frac{1}{x^\alpha}, \quad \Big|\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big| \le \frac{1}{x^\alpha},$$

iar integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$, rezultă că integralele improprii (1.88) sunt absolut convergente pentru $\alpha > 1$.

Deoarece $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ este divergentă, iar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet, rezultă că integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\Big(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx\Big) \tag{1.89}$$

este divergentă. Dacă avem în vedere că $|\sin x| \geq \sin^2 x$ din (1.89) tragem concluzia că integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \tag{1.90}$$

este divergentă. La rezultatele de până acum adăugăm faptul că pentru orice $x \geq 1$ şi $\alpha \in (0, 1)$ are loc inegalitatea evidentă

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{|\sin x|}{x}. \tag{1.91}$$

Din (1.90), (1.91) şi partea a doua a criteriului de comparaţie rezultă că integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ este divergentă pentru $\alpha \in (0, 1)$.

Aşadar, prima integrală din (1.88) este simplu convergentă pemtru $\alpha \in (0, 1)$. Analog se arată că a doua integrală din (1.88) este simplu convergentă.

Să ne ocupăm acum de integralele

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x^\alpha} dx. \tag{1.92}$$

Prima integrală din (1.92) este convergentă pentru $\alpha \in (0, 1]$ deoarece

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \alpha \in (0, 1) \\ 1 & \text{dacă} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Din $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1}\Big(\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big) = 1$ şi criteriul în α cu limită rezultă că prima integrală din (1.92) este convergentă pentru $1 < \alpha < 2$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 2$.

Prin urmare, integrala improprie (1.87) este semiconvergentă pentru $\alpha \in (0, 2)$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 2$.

Deoarece pentru $\alpha > 0$ avem $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x^\alpha} = +\infty$, rezultă că a doua integrală din (1.92) este o integrală improprie cu limita inferioară punct singular pentru orice $\alpha > 0$. Apoi, din limta evidentă $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^\alpha\Big(\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big) = 1$ şi Corolarul 1.10.3, rezultă că cea de a doua integrală din (1.92) este convergentă pentru orice $\alpha \in (0, 1)$ şi divergentă pentru orice $\alpha \geq 1$.

Ultimul rezultat arată că cea de a doua integrală improprie din (1.87) este semiconvergentă pentru $\alpha \in (0, 1)$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$. ■

1.12 Convergenţa în sensul valorii principale a unei integrale improprii

Definiţia 1.12.1 *Dacă integrala improprie de speţa întâi cu ambele limite de integrare puncte singulare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.93}$$

este divergentă dar există şi este finită

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx, \tag{1.94}$$

atunci spunem că funcţia $f:(-\infty,+\infty)\to I\!R$ *este* **integrabilă în sensul valorii principale** *sau că integrala* (1.93) *este* **convergentă în sensul valorii principale**, *iar*

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$$

se numeşte **valoarea principală** (*în sens Cauchy*) *a integralei* (1.93).

Fie funcţia $f:[a,b]\setminus\{c\}\to I\!R$ integrabilă Riemann pe orice compact $[u,t]\subset[a,c)$ sau $[u,t]\subset(c,b]$. În acest caz se poate vorbi de integrala improprie

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{1.95}$$

având punctul singular $c\in(a,b)$. Din cele prezentate în primul paragraf al acestui capitol rezultă că integrala improprie (1.95) este convergentă dacă fiecare din integralele improprii $\int_a^c f(x)dx$ şi $\int_c^b f(x)dx$ este convergentă. Aceasta înseamnă că limita de mai jos există şi este finită

$$\lim_{\substack{\eta\to c\\ \eta<c}}\int_a^{\eta} f(x)dx + \lim_{\substack{\xi\to c\\ \xi>c}}\int_{\xi}^{b} f(x)dx =$$

$$\lim_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0^+}}\Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+v}^{b} f(x)dx\Big)$$

pentru ξ şi η (respectiv u şi v) tinzând independnt la limitele lor. În acest caz

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0^+}} \Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+v}^b f(x)dx\Big).$$

Definiţia 1.12.2 *Dacă integrala improprie* (1.95), *având punctul singular în* $c \in (a,b)$ *este divergentă, însă există şi este finită*

$$\lim_{u\to 0^+} \Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^b f(x)dx\Big),$$

atunci spunem că f *este* **integrabilă pe** $[a,b]$ **în sensul valorii principale a lui Cauchy** *sau că integrala improprie* (1.95) *este* **convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy** *iar*

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to 0^+} \Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^b f(x)dx\Big),$$

se numeşte **valoarea principală** *în sens Cauchy a integralei* (1.95).

Exerciţiul 1.12.1 *Să se arate că dacă* $-\infty < a < c < b < +\infty$, *integrala improprie* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ *este divergentă, însă este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy.*

Soluţie. Punctul singular al integralei improprii considerate este în interiorul intervalului de integrare şi pentru a studia natura acesteia trebuie să determinăm limitele

$$\lim_{\lambda\to 0+0}\int_a^{c-\lambda}\frac{dx}{x-c} \quad \text{şi} \quad \lim_{\mu\to 0+0}\int_{c+\mu}^b\frac{dx}{x-c}.$$

Aceste două limite au respectiv valorile

$$-\ln(c-a) + \lim_{\lambda\to 0+0}\ln\lambda \quad \text{şi} \quad \ln(b-c) - \lim_{\mu\to 0+0}\ln\mu.$$

Prin urmare, avem

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\lambda\to 0+0\\ \mu\to 0+0}}\ln\frac{\lambda}{\mu}.$$

Însă limita de mai sus nu există ceea ce înseamnă că integrala improprie considerată este divergentă.

Considerând cazul particular $\lambda = \mu$, deducem că ultima limită este zero şi deci integrala improprie considerată este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy şi v.p. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}$. ∎

Exemplul 1.12.1 *Integrala improprie de speţa a doua, cu ambele limite puncte singulare, a unei funcţii impare f este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy şi v.p.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$

Soluţie. Într-adevăr, funcţia f fiind impară avem că $\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)dx = 0$, oricare ar fi $t > 0$. În consecinţă există limita din (1.94), deci integrala improprie considerată este convergentă în sensul valorii principală a lui Cauchy şi are valoarea principală egală cu 0. ∎

Exemplul 1.12.2 I*ntegrala improprie divergentă* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *a unei funcţii pare* $f : (-\infty, +\infty) \to I\!R$ *nu este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy.*

Soluţie. Într-adevăr, funcţia f fiind pară şi integrabilă Riemann pe orice compact de forma $[-t, t]$, $t > 0$, avem

$$\int_{-t}^{t} f(x)dx = 2\int_{0}^{t} f(x)dx = 2\int_{-t}^{0} f(x)dx.$$

Cum integrala improprie $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă, cel puţin una din integralele improprii $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ şi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă. Din această afirmaţie şi din egalitatea precedentă rezultă că nu există v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.∎

Exemplul 1.12.3 *Să se aplice noţiunea de valoare principală în sensul lui Cauchy a unei integrale improprii divergente pentru a se calcula valoarea integralei improprii*

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx, \tag{1.96}$$

unde m şi n sunt întregi pozitivi cu $0 < m < n$.

Soluţie. Rădăcinile numitorului funcţiei de integrat, $f(x) = \dfrac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$, sunt rădăcinile de ordinul $2n$ ale numărului complex -1. Având în vedere că forma trigonometrică a acestui număr complex este $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, rezultă că rădăcinile numitorului funcţiei f au expresiile

$$x_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = a_k + ib_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1.$$

Prin urmare, cele $2n$ rădăcini ale ecuaţiei $1 + x^{2n} = 0$ nu sunt reale şi deci funcţia de integrat este definită pe întreaga axă a numerelor reale.

Integrala improprie (1.96) este convergentă deoarece, în baza Exemplul 1.10.1, diferenţa gradelor polinoamelor de la numitorul şi numărătorul funcţiei de integrat este mai mare decât 1, această diferenţă fiind cel puţin 2.

Cu menţiunea prealabilă că integrala Riemann a unei funcţii complexe de variabilă reală $u(x) + iv(x)$, unde u şi v sunt funcţii reale, este definită prin

$$\int_a^b [u(x) + iv(x)]dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx,$$

să calculăm integrala definită de la $-\ell$ la ℓ, unde $\ell > 0$, din funcţia f. În acest scop vom folosi descompunerea numitorului funcţiei f în factori primi complexi şi a funcţiei de integrat în suma de fracţii $f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{A_k}{x - x_k}$, unde coeficienţii A_k sunt daţi de raportul dintre valoarea numărătorului funcţiei f în $x = x_k$ şi valoarea, în acelaşi punct x_k, a derivatei polinomului de la numitor, adică $A_k = \dfrac{x_k^{2m}}{2nx_k^{2n-1}} = -\dfrac{1}{2n}x_k^{2m+1}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$.

Avem

$$\int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{(x - a_k) - ib_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \Big\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x - a_k}{(x-a_k)^2 + b_k^2}dx + i\int_{-\ell}^{\ell} \frac{b_k}{(x-a_k)^2 + b_k^2}dx \Big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \Big\{ \ln\frac{(\ell - a_k)^2 + b_k^2}{(\ell + a_k)^2 + b_k^2} + i\Big[\operatorname{arctg}\frac{\ell - a_k}{b_k} + \operatorname{arctg}\frac{\ell + a_k}{b_k}\Big]\Big\}.$$

Trecând la limită pentru $\ell \to +\infty$, obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \sum_{k=0}^{2n-1} \pm\pi i A_k,$$

unde semnul plus corespunde lui $b_k > 0$, iar semnul minus se ia când $b_k < 0$.

Integralele improprii cu ambele limite de integrare puncte singulare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-x_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}dx,$$

unde k ia valori întregi de la zero până la $2n-1$, sunt divergente, iar numerele

$$\lim_{\ell\to+\infty} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x-x_k} =$$

$$= \lim_{\ell\to+\infty} \Big\{ \ln \frac{(\ell-a_k)^2+b_k^2}{(\ell+a_k)^2+b_k^2} + i\Big[\operatorname{arctg} \frac{\ell-a_k}{b_k} + \operatorname{arctg} \frac{\ell+a_k}{b_k}\Big]\Big\},$$

egale cu $+\pi i$ sau $-\pi i$, după cum $b_k > 0$, respectiv $b_k < 0$, reprezintă valorile principale ale integralelor.

Se constată simplu că $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-1}$ sunt numere pozitive, iar următoarele, adică $b_n,\ b_{n+1},\ \cdots,\ b_{2n-1}$, sunt negative. Deci, putem scrie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \pi i\Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_k - \sum_{k=n}^{2n-1} A_k\Big\}. \tag{1.97}$$

Prima sumă din membrul doi al relaţiei (1.97) are expresia

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi}, \tag{1.98}$$

de unde constatăm că este suma a n termeni ai unei progresii geometrice cu raţia $q = e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}$ şi primul termen egal cu $e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}$. Efectuând calculul sumei din (1.98), găsim

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi} - e^{i\,\frac{(2m+1)(2n+1)}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi} - e^{i\,(2m+1)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi} - e^{i\,(2m+1)\pi} \cdot e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \end{aligned} \tag{1.99}$$

Însă factorul $e^{i\,(2m+1)\pi}$ de la numărătorul expresiei (1.99) a sumei $\sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k$ este -1. Ca urmare, suma devine

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}+e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \tag{1.100}$$

Să determinăm acum valorea celei de a doua sume. Avem

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=n}^{2n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=n}^{2n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi}.$$

Indicele de sumare de aici se poate scrie în forma $k = n + s$, unde s va lua valori de la zero până la $n-1$. Expresia celei de a doua sume devine acum

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\cdot e^{i\,(2m+1)\pi}\cdot\sum_{s=0}^{n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2s+1)}{2n}\pi}.$$

Dacă se ţine cont de faptul că $e^{i\,(2m+1)\pi} = -1$ şi de rezultatul stabilit în (1.98), (1.99) şi (1.100), rezultă că expresia finală a celei de a doua sume este

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = \frac{1}{2n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2s+1)}{2n}\pi} = \frac{1}{n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \tag{1.101}$$

Din (1.97), (1.100) şi (1.101) rezultă

$$2J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = -\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{1.102}$$

Integrantul din (1.102) fiind o funcţie pară, rezultă valoarea unei alte integrale importante

$$J = \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{1.103}$$

care se va utiliza în calculul unei integrale improprii depinzând de un parametru. ■

Capitolul 2

Integrale depinzând de un parametru

2.1 Integrale proprii depinzând de un parametru

Fie f o funcţie reală de două variabile reale definită pe intervalul bidimensional închis

$$\Pi = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\},$$

cu proprietatea că restricţia sa la segmentul de dreaptă paralel cu axa Ox care trece prin punctul $(0, y)$

$$f(\cdot, y) : [a, b] \to I\!R$$

este funcţie integrabilă Riemann pentru orice valoare fixată a lui y din intervalul $[c, d]$.

Definiţia 2.1.1 *Funcţia reală de variabilă reală*

$$J : [c, d] \to I\!R, \qquad J(y) = \int_a^b f(x, y)dx, \tag{2.1}$$

se numeşte **integrală proprie depinzând de un parametru**. *Variabila* y *se numeşte* **parametru**.

Observaţia 2.1.1 *Pot fi introduse şi* **integrale proprii care depind de doi sau mai mulţi parametri***.*

Definiţia 2.1.2 *O* **integrală proprie care depinde de mai mulţi parametri** *are forma*

$$\Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) dx. \tag{2.2}$$

Parametrii $y_1, y_2, \cdots, y_n$ pot fi consideraţi coordonatele în baza canonică din $I\!R^n$ ale vectorului **parametru y** care aparţine intervalului $n-$dimensional închis

$$I_n = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \cdots \times [c_n, d_n] \subset I\!R^n.$$

Observaţia 2.1.2 *Integrala proprie care depinde de mai mulţi parametri* (2.2) *poate fi prezentată ca o integrală depinzând de un parametru,*

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx, \tag{2.3}$$

cu menţiunea că parametrul este vectorul $\mathbf{y} \in I_n$.

Ne propunem să studiem proprietăţile integralelor proprii care depind de un parametru.

Teorema 2.1.1 (**Continuitatea integralelor proprii depinzând de parametru)** *Dacă funcţia* f *este continuă pe intervalul bidimensional închis* Π, *atunci funcţia* $J : [c, d] \to I\!R$, *definită de integrala* (2.1), *este uniform continuă.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia $f(x, y)$ este continuă în intervalul bidimensional închis Π ea este uniform continuă. Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât inegalităţile

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon), \qquad |y' - y''| < \delta(\varepsilon)$$

implică inegalitatea

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{2.4}$$

Numărul δ depinde numai de ε fiind independent de poziţia ocupată de punctele (x', y') şi (x'', y'') în intervalul bidimensional închis Π.

În particular, luând $x' = x'' = x$ se constată că pentru orice y' şi $y'' = y$ din intervalului $[c, d]$ cu proprietatea

$$|y' - y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.5}$$

şi pentru orice $x \in [a, b]$, are loc inegalitatea

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{2.6}$$

Prin urmare, pentru orice y şi y' aparţinând intervalului $[c, d]$ care satisfac (2.5), avem

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y)| = \Big| \int_a^b \Big(f(x, y') - f(x, y)\Big)dx\Big| \le \\ \le \int_a^b |f(x, y') - f(x, y)|dx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Din (2.6) şi (2.7) rezultă că pentru orice $y, y' \in [c, d]$ cu proprietatea (2.5) are loc

$$|J(y') - J(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon.$$

Această inegalitate demonstrează că funcţia J din (2.1) este *uniform continuă.* ■

Corolarul 2.1.1 *În ipotezele teoremei precedente, funcţia*

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)dx \tag{2.8}$$

este uniform continuă în intervalul închis tridimensional

$$\Pi^* = \{(u, v, y) \in I\!R^3 : \ a \le u \le b, \ a \le v \le b, \ c \le y \le d\}.$$

Demonstraţie. Din continuitatea funcţiei f pe intervalul bidimensional închis Π, care este o mulţime compactă în $I\!R^2$, deducem că f este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile, deci există constanta pozitivă şi finită C astfel încât

$$|f(x, y)| \le C, \quad (x, y) \in \Pi.$$

Să evaluăm diferenţa valorilor funcţiei F în punctele

$$(u', v', y'), \quad (u'', v'', y'') \in \Pi^*,$$

adică

$$\Delta F = F(u', v', y') - F(u'', v'', y''). \tag{2.9}$$

Mai întâi, ΔF este diferenţa integralelor

$$\Delta F = \int_{u'}^{v'} f(x, y')dx - \int_{u''}^{v''} f(x, y'')dx.$$

În membrul al doilea a acestei diferenţe adunăm şi scădem integralele

$$\int_{u'}^{u''} f(x, y'')dx; \qquad \int_{v'}^{v''} f(x, y'')dx.$$

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul de integrare, diferenţa de integrale din membrul doi al relaţiei (2.9) se scrie

$$\Delta F = \int_{u'}^{v'} \Big(f(x, y') - f(x, y'')\Big)dx + \int_{u'}^{u''} f(x, y'')dx - \int_{v'}^{v''} f(x, y'')dx.$$

Luând modulul ambilor membri şi folosind proprietăţile integralelor definite, găsim

$$|\Delta F| \leq \Big| \int_{u'}^{v'} \Big|\Delta f(x, \Delta y)\Big|dx\Big| + \Big| \int_{u'}^{u''} |f(x, y'')|dx\Big| + \Big| \int_{v'}^{v''} |f(x, y'')|dx\Big|$$

unde, pentru simplitatea scrierii, s–a făcut pentru moment notaţia

$$\Delta f(x, \Delta y) = f(x, y') - f(x, y'').$$

Prin urmare, o nouă evaluare pentru valoarea absolută a diferenţei (2.9) este

$$|\Delta F| \leq \Big| \int_{u'}^{v'} \Big|f(x, y') - f(x, y'')\Big|dx\Big| + C\Big(|u'' - u'| + |v'' - v'|\Big).$$

Funcţia f fiind continuă în intervalul bidimensional închis Π, este uniform continuă, prin urmare pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_1(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $y', y'' \in [c, d]$ cu proprietatea

$$|y' - y''| < \delta_1(\varepsilon) \tag{2.10}$$

avem

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.11}$$

Să observăm că oriunde ar fi situat punctul (u', v') în intervalul bidimensional $[a, b] \times [a, b]$, diferenţa $|u' - v'| \leq b - a$ deci, folosind această observaţie şi (2.11), rezultă că oricare ar fi punctele $y', y'' \in [c, d]$ care satisfac (2.10), modulul diferenţei (2.9) se reevaluează după cum urmează

$$|\Delta F| < \frac{\varepsilon}{2} + C\Big(|u'' - u'| + |v'' - v'|\Big).$$

Analiza raţionamentului de mai sus conduce la concluzia că pentru orice $\varepsilon > 0$ există

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{4C}\}$$

astfel încât oricare ar fi punctele $(u', v', y'), (u'', v'', y'') \in \Pi^*$ ale căror coordonate satisfac inegalităţile

$$|u' - u''| < \delta(\varepsilon), \quad |v' - v''| < \delta(\varepsilon), \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon), \tag{2.12}$$

avem că

$$|F(u', v', y') - F(u'', v'', y'')| < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Din (2.12) şi (2.13) şi definiţia uniformei continuităţi a unei funcţii reale de trei variabile reale rezultă că funcţia $F : \Pi^* \to I\!\!R$ ale cărei valori sunt date de (2.8) este uniform continuă. ■

Teorema 2.1.2 (**Derivabilitatea unei integrale proprii care depinde de un parametru.**) *Dacă* f *şi* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sunt funcţii continue pe intervalul bidimensional închis* Π, *atunci funcţia* J *definită de integrala depinzând de parametrul* y (2.1) *este derivabilă pe compactul* $[c, d]$ *şi are loc relaţia*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \quad y \in [c, d]. \tag{2.14}$$

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că raportul incrementar al funcţiei J în punctul y are limită în y şi această limită este chiar integrala din ultimul membru al lui (2.14), adică

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y)dx. \tag{2.15}$$

În acest scop vom demonstra că pentru $\Delta y \neq 0$ diferenţa

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

tinde la zero când $\Delta y \to 0$. Să remarcăm întâi că, în baza teoremei creşterilor finite a lui Lagrange, există numărul pozitiv şi subunitar θ astfel încât

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} dx = \int_a^b f'_y(x,y+\theta\Delta y)dx.$$

În consecinţă, putem scrie

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)dx = \int_a^b \Big(f'_y(x,y+\theta\Delta y) - f'_y(x,y)\Big)dx.$$

Să evaluăm diferenţa din membrul doi a acestei relaţii pentru valori suficient de mici ale lui $|\Delta y|$. Deoarece derivata $f'_y(x,y)$ este continuă în intervalul bidimensional închis Π ea este uniform continuă şi deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice creştere a lui y care satisface

$$|\Delta y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.16}$$

este adevărată inegalitatea

$$|f'_y(x,y+\Delta y) - f'_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \tag{2.17}$$

$(\forall)\ x \in [a,b]$ şi $(\forall)\ y,\ y+\Delta y \in [c,d]$. Cum $0 < \theta < 1$, din (2.16) avem şi

$$|\theta\Delta y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.18}$$

ceea ce, în baza lui (2.17), atrage

$$|f'_y(x,y+\theta\Delta y) - f'_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{2.19}$$

Atunci, luând în consideraţie relaţiile stabilite mai sus, avem inegalitatea

$$\Big|\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon, \tag{2.20}$$

adevărată pentru toate valorile lui Δy care satisfac (2.16). Rezultatul stabilit în (2.20) arată că are loc (2.15) şi teorema este demonstrată. ■

Formula (2.14), cunoscută ca *regula lui Leibniz* de derivare a unei integrale depinzând de parametru, poate fi scrisă şi în forma

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \qquad y\in[c,d].$$

Observaţia 2.1.3 *Derivata unei integrale care depinde de un parametru este egală cu integrala derivatei parţiale a integrandului în raport cu variabila paramatru.*

Teorema 2.1.3 (**Derivabilitatea unei integrale proprii depinzând de parametru a cărei limite de integrare depind de parametru**) *Dacă funcţiile f şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe intervalul bidimensional închis Π, iar $x = x_1(y)$ şi $x = x_2(y)$ sunt funcţii derivabile pe intervalul $[c,d]$ cu valori în intervalul $[a,b]$, atunci integrala depinzând de parametrul y*

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \tag{2.21}$$

este o funcţie derivabilă pe compactul $[c,d]$ şi are loc relaţia

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f\Big(x_2(y),y\Big)\cdot\frac{dx_2}{dy}(y) - f\Big(x_1(y),y\Big)\cdot\frac{dx_1}{dy}(y),$$

oricare ar fi parametrul $y\in[c,d]$.

Demonstraţie. Avem

$$J(y) = F\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big), \tag{2.22}$$

unde funcţia F, definită în relaţia (2.8), posedă derivate parţiale continue pe paralelipipedul Π^* şi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v,y) \;=\; -f(u,y); \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v,y) \;=\; f(v,y); \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(u,v,y) \;=\; \displaystyle\int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \end{cases} \tag{2.23}$$

Primele două relaţii din (2.23) există şi sunt egale cu expresiile din membrul al doilea ale acestora în baza rezultatului cunoscut de la integrale definite care afirmă că dacă funcţia $g : [a, b] \to I\!\!R$ este continuă, atunci funcţiile G_1 şi G_2 definite pe $[a, b]$ prin

$$G_1(t) \;=\; \int_a^t f(x)dx, \qquad G_2(t) \;=\; \int_t^b g(x)dx$$

sunt derivabile şi

$$G_1'(t) \;=\; f(t), \qquad G_2'(t) \;=\; -\,f(t), \;\; (\forall)\; t \in [a, b]. \tag{2.24}$$

După Teorema 2.1.2 este adevărată şi cea de–a treia egalitate din (2.23), iar din Corolarul 2.1.1 rezultă că toate derivatele parţiale din (2.23) sunt funcţii continue pe paralelipipedul Π^*. Deoarece funcţiile $x = x_1(y)$ şi $x = x_2(y)$ sunt derivabile, aplicând funcţiei $y \mapsto F\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big)$ regula de derivare a funcţiilor compuse de o variabilă, obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy}F\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big) = \frac{\partial F}{\partial u}\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big)\cdot\frac{dx_1}{dy}(y) + \\ &+\frac{\partial F}{\partial v}\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big)\cdot\frac{dx_2}{dy}(y) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Însă, funcţia J din (2.21) este astfel încât are loc egalitatea (2.22). Acum, din relaţiile (2.23), (2.25) şi (2.22) rezultă concluzia teoremei. ■

Exemplul 2.1.1 *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de un parametru cu limitele de integrare variabile, să se evalueze integrala*

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln{(1+yx)}}{1+x^2}dx. \tag{2.26}$$

Soluţie. Suntem în ipotezele Teoremei 2.1.3 astfel că putem scrie

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{\ln{(1+y^2)}}{1+y^2} + \int_0^y \frac{x}{(1+yx)(1+x^2)}dx.$$

Integrala din membrul doi este o integrală dintr–o funcţie raţională. Descompunând în fracţii simple această funcţie raţională, obţinem

$$\frac{x}{(1+yx)(1+x^2)} = -\frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{1}{1+yx} + \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{x+y}{1+x^2}. \tag{2.27}$$

Deoarece, primitivele fracţiilor raţionale din membrul doi al egalităţii (2.27) se exprimă prin funcţii elementare, avem

$$\int_0^y \frac{x}{(1+yx)(1+x^2)}dx = -\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\cdot \operatorname{arctg} y.$$

În acest fel am obţinut

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\cdot \operatorname{arctg} y.$$

Trecând aici pe y în t, integrând apoi între 0 şi y şi ţinând cont că din (2.26) rezultă $J(0)=0$, obţinem

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}\,dt + \int_0^y \frac{t}{1+t^2}\cdot \operatorname{arctg} t\,dt.$$

Cea de a doua integrală de mai sus se calculează folosind metoda integrării prin părţi. Avem

$$\int_0^y \frac{t}{1+t^2}\cdot \operatorname{arctg} t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^y \operatorname{arctg} t\cdot \Big(\ln(1+t^2)\Big)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg} t\cdot \ln(1+t^2)\Big)\Big|_0^y - \int_0^y \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}\,dt.$$

Folosind acum ultimele două rezultate, deducem că expresia funcţiei J este

$$J(y) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\cdot \ln(1+y^2).$$

■

Teorema 2.1.4 (Integrabilitatea unei integrale proprii depinzând de parametru) *Dacă funcţia f este continuă pe intervalul bidimensional închis Π, atunci*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \qquad (2.28)$$

Demonstraţie. În locul egalităţii (2.28) vom demonstra o alta mult mai generală, şi anume

$$\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx = \int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy, \quad (\forall)\ t\in[a,b]. \qquad (2.29)$$

Pentru aceasta, introducem notaţiile

$$\varphi(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x,y)dx, \quad \psi(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{2.30}$$

Atunci, relaţia (2.29), care o avem de demonstrat, este echivalentă cu relaţia

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad (\forall)\ t \in [a,b]. \tag{2.31}$$

Pentru a demonstra (2.31) este suficient să arătăm că au loc egalităţile:

$$\varphi'(t) = \psi'(t), \quad (\forall)\ t \in [a,b]; \tag{2.32}$$

$$\varphi(a) = \psi(a). \tag{2.33}$$

Egalitatea (2.33) este evidentă deoarece din expresiile (2.30) constatăm că

$$\varphi(a) = 0, \qquad \psi(a) = 0.$$

Pentru demonstraţia egalităţii (2.32) să introducem funcţiile $F(t,y)$ şi $\xi(x)$ prin:

$$F(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx; \qquad \xi(x) = \int_c^d f(x,y)dy. \tag{2.34}$$

Vedem acum că funcţiile φ şi ψ se exprimă cu ajutorul funcţiilor nou introduse din (2.34) în modul:

$$\varphi(t) = \int_c^d F(t,y)dy; \qquad \psi(t) = \int_a^t \xi(x)dx.$$

Conform Corolarului 2.1.1, funcţia F din (2.34) este continuă, iar derivata parţială a acesteia în punctul (t,y), faţă de variabila t este, în baza lui $(2.24)_1$, egală cu $f(t,y)$ şi această derivată este funcţie continuă pentru $(t,y) \in [a,b]\times[c,d]$. Aplicând Teorema 2.1.3 deducem că avem

$$\varphi'(t) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t,y)dy = \int_c^d f(t,y)dy. \tag{2.35}$$

Funcţia $\xi = \xi(x)$ fiind uniform continuă pe compactul $[a,b]$ în baza Teoremei 2.1.1, este continuă pe $[a,b]$. Fiind îndeplinite ipotezele Teoremei 2.1.3, prin aplicarea ei funcţiei ψ, găsim

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t \xi(x)dx = \xi(t) = \int_c^d f(t,y)dy.$$

Din această egalitate şi (2.35) rezultă că are loc (2.32) deci, în baza uneia din consecinţele teoremei creşterilor finite a lui Lagrange, funcţiile φ şi ψ diferă printr–o constantă C, constantă care este diferenţa valorilor acestor două funcţii în orice punct din domeniul lor de definiţie. Luând acest punct să fie $t = a$ şi având în vedere (2.33), deducem că are loc relaţia (2.31) şi drept urmare are loc şi egalitatea (2.29). În particular, $\varphi(b) = \psi(b)$, adică are loc egalitatea (2.28), care este ceea ce trebuia demonstrat. ∎

Observaţia 2.1.4 *Egalitatea* (2.28) *arată că pentru a integra pe intervalul* $[c, d]$ *integrala depinzând de un parametru* (2.1), *integrăm funcţia* $f(x, y)$ *în raport cu acest parametru pe acelaşi interval, iar rezultatul integrării, care va fi o funcţie de* x, *se integrează pe compactul* $[a, b]$.

Exemplul 2.1.2 *Folosind teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru, să se calculeze integrala proprie depinzând de doi parametri*

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \frac{x^{y_1} - x^{y_2}}{\ln x} dx.$$

Soluţie. Se observă că

$$\frac{x^{y_1} - x^{y_2}}{\ln x} = \int_{y_2}^{y_1} x^y dy. \tag{2.36}$$

Folosind această observaţie, rezultă

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 dx \int_{y_2}^{y_1} x^y dy.$$

În ultima iteraţie de integrale aplicăm teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de parametrul y şi obţinem

$$J(y_1, y_2) = \int_{y_2}^{y_1} dy \int_0^1 x^y dx = \int_{y_2}^{y_1} \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{1+y}.$$

Cum ultima integrală este imediată, avem în final

$$J(y_1, y_2) = \ln \frac{1 + y_1}{1 + y_2}.$$

∎

Exemplul 2.1.3 *Să se determine funcţia J definită ca o integrală improprie depinzând de doi parametri a şi b*

$$J(a,b)=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\cdot\cos\ln\frac{1}{x}dx.$$

Soluţie. Folosim mai întâi rezultatul (2.36) în care $y_1=b$ şi $y_2=a$. Atunci, $J(a,b)$ se scrie

$$J(a,b)=\int_0^1 \cos\ln\frac{1}{x}dx\int_a^b x^y dy.$$

În membrul doi al acestei relaţii aplicăm teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru şi obţinem

$$J(a,b)=\int_a^b J_1(y)dy, \tag{2.37}$$

unde am introdus notaţia

$$J_1(y)=\int_0^1 x^y\,\cos\ln\frac{1}{x}dx. \tag{2.38}$$

Pentru calculul integralei (2.38), efectuăm schimbarea de variabilă

$$\ln x=t \implies x=e^t \implies dx=e^t\,dt,\quad t\in(-\infty,0].$$

Folosind formula schimbării de variabilă întro integrală improprie, suntem conduşi la

$$J_1(y)=\int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t}\cos t\,dt.$$

Dacă în ultima integrală se aplică de două ori formula integrării prin părţi, obţinem

$$J_1(y)=y+1-(y+1)^2J_1(y),$$

de unde deducem că valoarea lui $J_1(y)$ este

$$J_1(y)=\frac{y+1}{1+(y+1)^2}.$$

Folosind acum acest rezultat în (2.37), deducem

$$J(a,b)=\int_a^b \frac{y+1}{1+(y+1)^2}dy.$$

Ultima integrală este imediată şi are valoarea

$$J(a,b)=\frac{1}{2}\,\ln\Big(1+(y+1)^2\Big)\Big|_a^b=\frac{1}{2}\,\ln\frac{b^2+b+2}{a^2+a+2}.$$

■

2.2 Integrale improprii simple depinzând de un parametru

Teoremele demonstrate în paragraful precedent pot fi extinse fără dificultate la integralele improprii de tipul particular

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,g(x)dx, \tag{2.39}$$

unde funcţia $f : [a,b) \times [c,d] \to I\!R$ este continuă şi mărginită, iar funcţia $g : [a,b) \to I\!R$ poate fi discontinuă în caz general, însă integrala improprie $\int_a^b g(x)dx$, cu limita superioară punct singular, este absolut convergentă. Limita superioară poate fi finită sau infinită. Consideraţii analoage se pot face când a este punct singular.

Ipotezele pentru care teoremele din capitolul precedent sunt adevărate pentru integrale de tipul (2.39) le vom formula în teoremele care urmează. Aceste teoreme sunt folosite frecvent în fizica matematică şi în teoria integralelor Fourier.

Teorema 2.2.1 (Teoremă generalizată de continuitate a unei integrale improprii simple depinzând de un parametru) *Dacă funcţia reală de două variabile reale*

$$f : [a,+\infty) \times [c,d] \to I\!R \tag{2.40}$$

este continuă şi mărginită, iar integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^{+\infty} |g(x)|dx \tag{2.41}$$

este convergentă, atunci integrala improprie de speţa întâi depinzând de un parametru

$$J(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,g(x)dx \tag{2.42}$$

este funcţie uniform continuă de y pe intervalul $[c,d]$.

Demonstraţie. Fie $C > 0$ şi $K > 0$ constante reale cu proprietăţile:

$$\begin{aligned} &|f(x,y)| < C,\ (\forall)\ (x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]; \\ &\int_a^{+\infty} |g(x)|dx = K < +\infty, \end{aligned} \tag{2.43}$$

existenţa cărora rezultă din ipotezele teoremei. Fie acum $\varepsilon > 0$ luat arbitrar. Integrala improprie (2.41) fiind convergentă, există $\ell > a$, suficient de mare, astfel încât

$$2C\int_{\ell}^{+\infty}|g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.44}$$

Luând un astfel de ℓ încât să aibă loc inegalitatea (2.44) şi alegând arbitrar pe y' şi y'' din intervalul $[c, d]$, putem reprezenta diferenţa $J(y') - J(y'')$ în forma

$$J(y') - J(y'') = \int_a^{\ell}\Big(f(x,y') - f(x,y'')\Big)g(x)dx +$$

$$+\int_{\ell}^{+\infty}\Big(f(x,y') - f(x,y'')\Big)g(x)dx.$$

Deoarece funcţia f este continuă în intervalul bidimensional închis $[a,\ \ell\,]\times[c, d]$, ea este uniform continuă. Prin urmare, pentru $\varepsilon > 0$, ales arbitrar mai sus, există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât la orice alegere a lui y' şi y'' din compactul $[c, d]$ care să satisfacă inegalitatea

$$|y' - y''| < \delta(\varepsilon), \tag{2.45}$$

valorile corespunzătoare ale lui f în punctele (x, y') şi (x, y'') satisfac inegalitatea

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2K},\ \ (\forall)\ x \in [a, \ell\,].$$

Această egalitate, împreună cu (2.43), (2.44) şi (2.45), implică relaţiile

$$\begin{aligned}|J(y') - J(y'')| \ \leq\ & \int_a^{\ell}|f(x,y') - f(x,y'')|\cdot|g(x)|dx +\\ & +\int_{\ell}^{+\infty}\Big(|f(x,y')| + |f(x,y'')|\Big)|g(x)|dx <\\ & < \frac{\varepsilon}{2K}\int_a^{\ell}|g(x)|dx + 2\,C\int_{\ell}^{+\infty}|g(x)|dx <\\ & < \frac{\varepsilon}{2K}K + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

care arată că integrala improprie depinzând de parametrul y din (2.39) este o funcţie continuă pe compactul $[c, d]$, deci şi uniform continuă. ∎

Teorema 2.2.2 (Derivabilitatea unei integrale improprii simple depinzând de un parametru) *Dacă funcţia* (2.40) *şi derivata sa parţială în raport cu y*

$$\frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!R$$

sunt continue şi mărginite, iar integrala improprie de speţa întâi (2.41) *este convergentă, atunci integrala improprie simplă* (2.42), *de speţa întâi şi depinzând de parametrul y, este o funcţie derivabilă şi*

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) g(x) dx.$$

Exerciţiul 2.2.1 *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor improprii simple depinzând de un parametru, să se calculeze*

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} yx}{x\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Soluţie. Integrala improprie depinzând de un parametru din acest exemplu este de forma (2.39), unde:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} yx}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 2.2.2 astfel că, putem scrie

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{x}{x(1 + y^2x^2)\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + y^2x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

În ultima integrală efectuăm schimbarea de variabilă $x = \sin t$. Obţinem integrala

$$J'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + y^2 \sin^2 t}$$

care, după schimbarea de variabilă $u = \operatorname{tg} t$, devine

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (1 + y^2)u^2}.$$

O primitivă a funcţiei de integrat din ultima integrală improprie depinzând de un parametru este simplu de calculat. Prin urmare,

$$J'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \operatorname{arctg} (u\sqrt{1 + y^2})\Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Deoarece valoarea în $y = 0$ a funcţiei J este zero, avem

$$J(y) = \int_0^y J'(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Cum primitiva ultimei funcţii de integrat este $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$, rezultă în final

$$J(y) = \frac{\pi}{2}\,\ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

■

Exerciţiul 2.2.2 *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor improprii simple depinzând de un parametru, să se calculeze*

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2 y)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

unde parametrul y *este astfel încât* $|y| < 1$.

Soluţie. La fel ca în exerciţiul precedent, $J(y)$ este de forma (2.39), unde

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 y), \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 2.2.2, deci

$$J'(y) = -\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2 y)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Efectuând în ultima integrală schimbarea de variabilă $x = \sin t$, obţinem

$$J'(y) = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t dt}{1 - y\sin^2 t},$$

după care, dacă schimbăm variabila folosind $u = \operatorname{tg} t$, deducem

$$J'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)[1+(1-y)u^2]}.$$

Noua funcţie de integrat se descompune în fracţii simple şi, după integrarea acestora, găsim

$$J'(y) = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{y\sqrt{1-y}}\Big).$$

Procedând asemănător ca la exerciţiul precedent, găsim că valoarea lui $J(y)$ este $J(y) = \pi \ln \dfrac{1+\sqrt{1-y}}{2}$. ■

Teorema 2.2.3 (Integrabilitatea unei integrale improprii simple depinzând de un parametru) *Dacă funcţia* (2.40) *este continuă şi mărginită, iar integrala improprie de speţa întâi* (2.41) *este convergentă, atunci integrala improprie simplă de speţa întâi* (2.42), *depinzând de parametrul* y, *este o funcţie de* y *integrabilă Riemann pe intervalul* $[c, d]$ *şi*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\, g(x)dx =$$

$$= \int_a^{+\infty} \Big(g(x) \int_c^d f(x,y)dy\Big)dx.$$

Operaţiile de derivare şi integrare ale integralelor improprii depinzând de un parametru de forma specială (2.42) se aplică pentru a calcula valorile unor integrale proprii sau improprii care nu conţin neapărat parametri dar în care, în prealabil, se introduc unul sau mai mulţi parametri.

Exemplul 2.2.1 *Să se evalueze integrala improprie de prima speţă depinzând de parametrul* $y \in [-A, A]$

$$J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\, xy}{x}\, e^{-\,\alpha x} dx, \tag{2.46}$$

unde α *este o constantă reală pozitivă fixată.*

Soluţie. Punând $f(x,y) = \dfrac{\sin\, xy}{x}$ şi $g(x) = e^{-\,\alpha x}$ observăm că $f(x,y)$ şi $f'_y(x,y)$ sunt funcţii continue şi mărginite pe intervalul bidimensional nemărginit

$$[0,\, +\infty) \times [-A,\, A\,],$$

iar integrala

$$\int_0^{+\infty} |g(x)|dx = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

este convergentă. Prin urmare, putem aplica Teorema 2.2.2. După derivarea sub semnul integrală în (2.46), obţinem

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha x} \cos\, xydx. \tag{2.47}$$

Integrând prin părţi de două ori în membrul al doilea al relaţiei (2.47), găsim

$$J'(y) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} \tag{2.48}$$

de unde, prin integrare de la 0 la y şi $J(0)=0$, obţinem

$$J(y)=\int_0^y J'(t)dt=\int_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\,dt=\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}. \tag{2.49}$$

Există şi o altă cale de calculare a integralei (2.46) pornind de la rezultatul intermediar (2.48) care constă mai întâi în determinarea unei primitive a funcţiei

$$y\mapsto \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}.$$

O asemenea primitivă poate fi $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\alpha}$ şi prin urmare vom avea

$$J(y)=C+\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}, \tag{2.50}$$

unde C este o constantă arbitrară. Punând $y=0$ în (2.50) şi ţinând cont că $J(0)=0$ găsim că $C=0$ şi din nou ajungem la (2.49).

Dacă în egalitatea (2.49) trecem la limită pentru $\alpha\to+0$ şi în rezultatul obţinut punem $y=1$, găsim valoarea integralei improprii a lui Dirichlet, a cărei natură am studiat–o anterior,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{2.51}$$

Desigur, pornind de la integrala (2.46), a cărei valoare este dată în (2.49), putem să dăm valorile altor integrale improprii. Ca exemplu, avem

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\,xy}{x}\,e^{-x}dx=\operatorname{arctg}y,$$

care se obţine din (2.46) şi (2.49) luând $\alpha=1$. ■

2.3 Integrale improprii depinzând de un parametru, uniform convergente

2.3.1 Definiţia integralelor improprii depinzând de un parametru, uniform convergente

Să considerăm o funcţie reală de două variabile reale

$$f:[a,+\infty)\times[c,d]\to I\!R \tag{2.52}$$

cu proprietatea că restricţia sa la orice paralelă la axa Ox care trece prin punctul $(0, y)$, adică funcţia $f(\cdot, y) : [a, +\infty) \to I\!R$, este integrabilă în sens generalizat, ceea ce este echivalent cu a spune că integrala improprie de speţa întâi depinzând de parametrul y

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \tag{2.53}$$

este convergentă. În baza definiţiei convergenţei unei integrale improprii, avem

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x, y)dx. \tag{2.54}$$

Integralele improprii de speţa a doua care depind de un parametru se definesc în mod asemănător. De exemplu, dacă

$$f : [a,\, b) \times [c, d] \subset I\!R^2 \to I\!R \tag{2.55}$$

este o funcţie reală de două variabile reale nemărginită în vecinătatea punctelor (b, y), iar integrala improprie

$$\int_a^b f(x, y)dx \tag{2.56}$$

este convergentă pentru orice valoare fixată a lui y din compactul $[c, d]$, atunci

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_a^{b-\lambda} f(x, y)dx \tag{2.57}$$

este o funcţie de y definită pe compactul $[c, d]$ care se numeşte *integrală improprie de speţa a doua care depinde de un parametru.*

În studiul integralelor improprii depinzând de un parametru (2.54) şi (2.57) un rol important îl are noţiunea de *uniformă convergenţă.*

Definiţia 2.3.1 *Spunem că integrala improprie de speţa întâi* (2.53), *depinzând de parametrul* y, *este* **uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul** $[c, d]$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $L = L(\varepsilon)$ *astfel încât inegalitatea*

$$\Big|J(y) - \int_a^\ell f(x, y)dx\Big| = \Big|\int_\ell^{+\infty} f(x, y)dx\Big| < \varepsilon$$

este satisfăcută simultan pentru toţi $\ell > L(\varepsilon)$ *şi* $y \in [c, d]$.

Uniforma convergenţă a unei integrale improprii de speţa a doua, de forma (2.57), care depinde de parametrul $y \in [c, d]$, se defineşte asemănător.

Definiţia 2.3.2 *Integrala improprie de speţa a doua* (2.57), *care depinde de parametrul* $y \in [c, d]$, *se numeşte* **uniform convergentă în raport cu parametrul** y **pe intervalul** $[c, d]$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât inegalitatea*

$$\Big| J^*(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x, y)dx \Big| = \Big| \int_{b-\lambda}^{b} f(x, y)dx \Big| < \varepsilon$$

are loc simultan pentru toţi $\lambda < b - a$ *care satisfac condiţia* $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$ *şi pentru toţi* $y \in [c, d]$.

Exemplul 2.3.1 *Integrala improprie de speţa întâi depinzând de un parametru*

$$J(y) = \int_0^{+\infty} y\, e^{-xy} dx \tag{2.58}$$

este convergentă pentru fiecare $y \in [0, 1]$, *însă nu este uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe compactul* $[0, 1]$.

Într-adevăr, avem

$$\int_0^{\ell} y\, e^{-\,xy} dx = \int_0^{\ell y} e^{-\,u}\, du = -\, e^{-\,u}\Big|_0^{\ell y} = 1 - e^{-\,\ell y},$$

de unde deducem

$$\lim_{\ell \to +\infty} \int_0^{\ell y} e^{-\,xy} dx = \lim_{\ell \to +\infty} (1 - e^{-\,\ell y}) = 1$$

ceea ce arată că integrala improprie (2.58) este convergentă pentru fiecare $y \in [0, 1]$.

Conform Definiţiei 2.3.1, pentru studiul convergenţei uniforme trebuie calculată diferenţa

$$J(y) - \int_0^{\ell} y\, e^{-\,xy} dx = \int_{\ell}^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx = \int_{\ell y}^{+\infty} e^{-\,u}\, du = e^{-\,\ell\, y}.$$

Pentru o valoare fixată şi arbitrar de mare $\ell > 0$, această diferenţă întrece pe $1/2$ pentru toate valorile lui y suficient de apropiate de zero şi, în consecinţă,

pentru $\varepsilon = 1/2$ nu există $L(\varepsilon)$ astfel încât, pentru $\ell > L(\varepsilon)$ şi pentru toţi $y \in [0,1]$, să fie satisfăcută inegalitatea

$$\Big|\int_t^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx\Big| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Acest rezultat arată că integrala improprie de speţa întâi (2.58) nu este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[0,1]$.

Exerciţiul 2.3.1 *Să se arate că integrala improprie* (2.58) *este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul* $[\delta, 1]$, *cu* $0 < \delta < 1$.

Soluţie. Într-adevăr, avem

$$\int_\ell^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx = \int_{\ell\, y}^{+\infty} e^{-\,u}\, du = e^{-\,\ell\, y} \le e^{-\,\ell\,\delta}$$

pentru $0 < \delta \le y \le 1$ şi prin urmare inegalitatea

$$\Big|\int_\ell^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx\Big| < \varepsilon$$

are loc pentru orice

$$\ell > \frac{\ln \dfrac{1}{\varepsilon}}{\delta}, \;\; 0 < \varepsilon < 1, \tag{2.59}$$

şi pentru toţi $y \in [\delta, 1]$, unde $0 < \delta < 1$. În baza Definiţiei 2.3.1, rezultă că integrala improprie (2.58), de speţa întâi şi depinzând de parametrul y, este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe compactul $[\delta, 1]$, cu $0 < \delta < 1$. ■

2.3.2 Reducerea integralelor improprii depinzând de un parametru la şiruri de funcţii

O integrală improprie depinzând de un parametru poate fi redusă la un şir de funcţii, iar această reducere face posibilă demonstraţia teoremelor fundamentale referitoare la astfel de integrale în baza teoremelor corespunzătoare ale şirurilor de funcţii.

Dacă integrala (2.53) este convergentă pentru fiecare $y \in [c, d]$, atunci, pentru un şir numeric arbitrar, (ℓ_n), cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii incluşi

în intervalul nemărginit $[a, +\infty)$, şirul de funcţii (F_n) definite pe intervalul $[c, d]$, cu termenul general

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_k} f(x, y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad c \leq y \leq d$$

este evident convergent la $J(y)$ pe intervalul $[c, d]$.

Pentru a se urmări cu eficienţă raţionamentele de mai jos se impune să reamnitim definiţiile convergenţei şi uniformei convergenţe ale unui şir de funcţii.

Definiţia 2.3.3 *Şirul de funcţii (f_n) se numeşte* **convergent** *la funcţia $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru orice valoare fixată $x \in [a, b]$ şirul numeric $(f_n(x))$ este convergent la numărul $f(x)$, adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $x \in [a, b]$ există un număr $N = N(\varepsilon, x)$ (care depinde de ε şi în general şi de x, care nu este neaparat număr natural) astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{pentru orice} \quad n > N(\varepsilon, x).$$

Dintre şirurile de funcţii convergente de o importanţă esenţială sunt aşa numitele şiruri *uniform convergente.*

Definiţia 2.3.4 *Şirul de funcţii (f_n) se numeşte* **uniform convergent** *la funcţia $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ (dependent de ε, însă independent de x şi care nu este neaparat număr natural) astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{pentru orice} \quad n > N(\varepsilon)$$

şi pentru orice $x \in [a, b]$.

Pentru demonstraţiile teoremelor care formulează proprietăţile integralelor improprii depinzând de un parametru, vom avea nevoie de trei rezultate stabilite la studiul şirurilor de funcţii pe care le reamintim mai jos.

Teorema 2.3.1 *Dacă şirul de funcţii continue (f_n) definite pe compactul $[a, b]$ este nedescrescător şi convergent la funcţia continuă $f(x)$, atunci convergenţa este uniformă.*

Teorema 2.3.2 *Dacă şirul de funcţii continuu diferenţiabile* (f_n) *este convergent la funcţia* f *pe* $[a,b]$*, iar şirul derivatelor* (f'_n) *este uniform convergent la funcţia* $\varphi(x)$ *pe* $[a,b]$*, atunci funcţia* f *este derivabilă pe* $[a,b]$ *şi*

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x). \tag{2.60}$$

Teorema 2.3.3 *Dacă şirul de funcţii continue* (f_n) *este uniform convergent pe intervalul* $[a,b]$ *la funcţia* $f(x)$*, atunci şirul integralelor*

$$\Big(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\Big)$$

este uniform convergent pe intervalul $[a,b]$ *la funcţia definită prin integrala* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$*, oricare ar fi* $x_0 \in [a,b]$.

Teorema de mai jos are loc în condiţia ca integrala (2.53) să fie convergentă pentru orice y aparţinând compactului $[c,d]$.

Teorema 2.3.4 *Pentru ca integrala* $J(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *să fie uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe compactul* $[c,d]$*, este necesar şi suficient ca şirul de funcţii*

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx, \quad n = 1,2,\cdots \tag{2.61}$$

să fie uniform convergent spre $J(y)$ *pe compactul* $[c,d]$ *oricare ar fi alegerea şirului* $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n, \cdots$*, cu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = +\infty$ *şi* $\ell_n \geq a$.

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe compactul $[c,d]$. Atunci, considerând $\varepsilon > 0$, arbitrar, există $L(\varepsilon) > a$, astfel încât pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ inegalitatea

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

este satisfăcută simultan pentru toţi $y \in [c,d]$.

Să considerăm şirul numeric (ℓ_n), cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii situaţi în intervalul $[a,+\infty)$. Considerându-l pe $L(\varepsilon)$ de mai sus, din teorema de caracterizare a limitei unui şir numeric, deducem că există $N(\varepsilon) \in I\!N^*$ astfel

încât $\ell_n > L(\varepsilon)$ pentru toţi $n > N(\varepsilon)$. În consecinţă, pentru un astfel de n, inegalitatea

$$|J(y) - F_n(y)| = |J(y) - \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

are loc pentru orice $y \in [c,d]$. Aceasta înseamnă că şirul de funcţii (F_n), având termenul general dat de (2.61), este uniform convergent la funcţia $J(y)$, definită de (2.53), pe intervalul $[c,d]$.
Suficienţa. Să arătăm că dacă orice şir de funcţii (F_n), având termenul general dat de (2.61), unde $\ell_n \to +\infty$, $\ell_n \geq a$, este uniform convergent la funcţia $J(y)$, definită de (2.53), pe intervalul $[c,d]$, atunci integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe acest interval.

Într-adevăr, dacă presupunem că (2.53), care prin ipoteză este convergentă pentru orice $y \in [c,d]$ fixat, converge neuniform în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$, atunci există ε_0 astfel încât pentru orice L arbitrar de mare există $\ell > L$ şi $y \in [c,d]$ aşa fel încât să avem

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x,y)dx| \geq \varepsilon_0.$$

Presupunând că L ia valorile $[a]+1$, $[a]+2$, $\cdots$, $[a]+n$, $\cdots$, obţinem şirul numeric (ℓ_n), cu $\ell_n > n$, şi un şir (y_n), cu $y_n \in [c,d]$, pentru care

$$|J(y_n) - \int_a^{\ell_n} f(x,y_n)dx| = |J(y_n) - F_n(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Aceasta înseamnă că şirul de funcţii (F_n), cu termenul general $F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx$, astfel construit, converge neuniform pe intervalul $[c,d]$, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Observaţia 2.3.1 *Dacă funcţia f nu schimbă de semn, atunci pentru ca integrala improprie* (2.53) *să fie uniform convergentă în raport cu parametrul $y \in [c,d]$ este suficient ca şirul de funcţii* (2.61) *să fie convergent la integrala $J(y)$ cel puţin pentru o alegere particulară a şirului numeric (ℓ_n), cu elementele din intervalul $[a,+\infty)$ şi cu limita $+\infty$.*

Într-adevăr, presupunând f funcţie nenegativă, avem

$$\int_a^{\ell} f(x,y)dx \geq \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx$$

pentru orice $\ell \geq \ell_n$. În consecinţă,

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x,y)dx| \leq |J(y) - \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

pentru orice $\ell > \ell_n$ şi pentru toţi $y \in [c,d]$ şi cu ℓ_n suficient de mare. ∎

Observaţia 2.3.2 *Dacă funcţia f este continuă şi nu schimbă de semn (de exemplu, este nenegativă) şi integrala improprie (2.53) este funcţie continuă de parametrul $y \in [c,d]$, această integrală este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$.*

Într-adevăr, considerând şirul numeric crescător (ℓ_n) cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii situaţi în intervalul $[a,+\infty)$ ajungem la şirul de funcţii (F_n) având termenul general

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.62}$$

Funcţia f fiind nenegativă, şirul de funcţii (F_n) cu termenul general (2.62) este monoton nedescrescător, iar conform Teoremei 2.1.1, funcţiile $F_n(y)$ din (2.62) sunt continue. Mai mult, acest şir de funcţii converge la funcţia continuă

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{2.63}$$

pe intervalul $[c,d]$. Dar Teorema 2.3.1 implică convergenţa uniformă a şirului de funcţii (2.62) la funcţia limită (2.63) şi, în consecinţă, după Observaţia 2.3.1 integrala $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe acest interval. ∎

Observaţia 2.3.3 *Integrala improprie de speţa a doua*

$$J^*(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx$$

se poate reduce în mod asemănător la şirul de funcţii (F_n^*), unde

$$F_n^*(y) = \int_a^{b-\lambda_n} f(x,y)dx,$$

iar (λ_n) este un şir numeric convergent la zero având termenii cuprinşi în intervalul $(0, b-a)$.

2.3.3 Proprietăţile integralelor improprii uniform convergente în raport cu parametrul y

În continuare prezentăm unele proprietăţi ale integralelor improprii de tipul (2.53) şi (2.57) din care vom constata că ipoteza suplimentara a uniformei convergenţe în raport cu parametrul y ale acestora implică continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea lor.

Teorema 2.3.5 (Continuitatea unei integrale improprii depinzând parametru) *Dacă funcţia* $f : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!\!R$ *este continuă şi integrala* (2.53) *este uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe intervalul* $[c, d]$, *atunci funcţia* $J(y)$ *din* (2.53) *este continuă pe acest interval.*

Demonstraţie. Considerăm şirul de funcţii (F_n) cu termenul general (2.62), unde $y \in [c, d]$. După Teorema 2.1.1, funcţiile (2.62) sunt continue pe intervalul $[c, d]$. Mai departe, Teorema 2.3.4 implică că şirul considerat este uniform convergent la integrala $J(y)$ din (2.53) şi, în consecinţă, funcţia $J(y)$ este continuă pentru că este limita unui şir de funcţii uniform convergent. ∎

Teorema 2.3.6 (Derivabilitatea unei integrale improprii depinzând de parametru) *Dacă funcţiile*

$$f : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!\!R \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!\!R$$

sunt continue, integrala improprie (2.53) *este convergentă, iar integrala improprie depinzând de parametrul* y

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \tag{2.64}$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul y *pe intervalul* $[c, d]$, *atunci funcţia* (2.53) *este derivabilă pe* $[c, d]$ *şi*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \quad y \in [c, d]. \tag{2.65}$$

Demonstraţie. Considerăm din nou şirul de funcţii (F_n) cu termenul general (2.62), unde $y \in [c, d]$, convergent la integrala (2.53) pe intervalul $[c, d]$. Conform Teoremei 2.1.2, funcţiile $F_n(y)$ sunt derivabile şi are loc egalitatea

$$F_n'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx = \int_a^{\ell_n} f_y'(x, y)dx, \tag{2.66}$$

unde $n = 1, 2, \cdots, \quad c \leq y \leq d,$ iar funcţiile $F_n'(y)$ sunt continue pe $[c, d]$.

Din ipoteze şi Teorema 2.3.4 rezultă că şirul de funcţii (F_n') este uniform convergent la integrala improprie (2.64) şi $F_n'(y)$ sunt funcţii continue pe $[c, d]$. Constatăm că şirul de funcţii (F_n) satisface ipotezele din Teorema 2.3.2, prin urmare, integrala improprie $J(y)$ este o funcţie continuu diferenţiabilă pe $[c, d]$ şi relaţia

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f_y'(x, y)dx$$

are loc pentru orice $y \in [c, d]$, ceea ce trebuia de demonstrat. ■

Observaţia 2.3.4 *Având în vedere expresia* (2.53) *a funcţiei* $J(y)$, *rezultă că identitatea* (2.65) *se scrie*

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx,$$

de unde deducem că în ipotezele Teoremei 2.3.6 operaţiile de derivare şi integrare ale unei integrale improprii depinzând de un parametru sunt comutabile.

Teorema 2.3.7 (Integrabilitatea unei integrale improprii depinzând de un parametru) *Dacă funcţia f din* (2.52) *este continuă şi integrala improprie depinzând de un parametru* (2.53) *este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul* $[c, d]$, *atunci funcţia* $J(y)$ *din* (2.53) *este integrabilă şi*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{2.67}$$

Demonstraţie. Pentru orice şir de numere

$$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n, \cdots, \quad (\ell_n \geq a, \lim_{n\to\infty} \ell_n = +\infty),$$

şirul de funcţii corespunzător

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

este uniform convergent la funcţia $J(y)$ pe $[c, d]$, aceasta rezultând din Teorema 2.3.4. După Teorema 2.1.1, toate funcţiile $F_n(y)$ sunt continue pe intervalul $[c, d]$. Fiindcă sunt îndeplinite ipotezele din Teorema 2.3.3, avem

$$\lim_{n\to+\infty} \int_c^d F_n(y)dy = \int_c^d J(y)dy.$$

Pe de altă parte, Teorema 2.1.4 implică egalităţile

$$\int_c^d F_n(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx = \int_a^{\ell_n} dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

În consecinţă, pentru orice alegere a şirului (ℓ_n), cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii aparţinând intervalului nemărginit $[a,+\infty)$, avem

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{\ell_n} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d J(y)dy.$$

Aceasta înseamnă că integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy$$

este convergentă şi egalitatea

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

este satisfăcută şi astfel teorema este demonstrată. ∎

Corolarul 2.3.1 *Dacă $f(x,y)$ este o funcţie continuă care nu schimbă de semn pentru $a \le x < +\infty$, $c \le y \le d$ (de exemplu, $f(x,y)$ este nenegativă), iar integrala*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

este o funcţie continuă de y pentru $c \le y \le d$, atunci relaţia (2.67) *este adevărată.*

Demonstraţie. Într Observaţia 2.3.2 implică convergenţa uniformă a integralei improprii $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ pe intervalul $c \le y \le d$ şi, în consecinţă, după Teorema 2.3.7, egalitatea (2.67) este adevărată. ∎

Observaţia 2.3.5 E*galitatea* (2.67) *se mai poate scrie în forma*

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy,$$

din care deducem că în ipotezele Teoremei 2.3.7 cele două operaţii de integrare sunt comutabile.

Teorema 2.3.8 (Schimbarea ordinii de integrare întro integrală improprie iterată a unei funcţii de semn constant) *Dacă*

$$f : [a, +\infty) \times [c, +\infty) \to \mathbb{R} \tag{2.68}$$

este o funcţie continuă de semn constant, integralele improprii depinzând de parametrul y

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \quad \text{şi} \quad J^*(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

sunt funcţii continue pe intervalele $[c, +\infty)$, *respectiv* $[a, +\infty)$, *şi cel puţin una din integralele improprii:*

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx; \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy \tag{2.69}$$

este convergentă, atunci cealaltă integrală improprie din (2.69) *este convergentă şi*

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \quad = \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy.$$

Demonstraţie. Să considerăm că funcţia f este nenegativă şi că integrala improprie iterată

$$J = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \tag{2.70}$$

este convergentă. Trebuie să demonstrăm că

$$\lim_{\ell \to +\infty} \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = J = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx. \tag{2.71}$$

Pentru aceasta vom arăta că valoarea absolută a diferenţei dintre cantitatea variabilă $\int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ şi cantitatea constantă

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

poate fi făcută mai mică decât un $\varepsilon > 0$ ales arbitrar.

Conform Corolarului 2.3.1, are loc egalitatea

$$\int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{\ell} f(x, y)dx.$$

Funcţia $f(x,y)$ fiind nenegativă, putem scrie

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \\ &= \int_c^{+\infty} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx = \\ &= \int_c^{c_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx \leq \\ &\leq \int_c^{c_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \end{aligned} \tag{2.72}$$

unde $c < c_1 < +\infty$.

Deoarece (2.70) este integrală improprie convergentă rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $c_1 > c$ astfel încât

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.73}$$

Din continuitaea integralei $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ pe intervalul $c \leq y < +\infty$ (vezi ipoteza) şi Observaţia 2.3.2 rezultă că integrala de mai sus este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe orice compact $[c, c_1]$. Prin urmare, pentru $\varepsilon > 0$ ales arbitrar mai sus există $L(\varepsilon) > a$ astfel încât pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ şi $y \in [c, c_1]$ are loc inegalitatea

$$\int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}. \tag{2.74}$$

Folosind acest rezultat constatăm că inegalitatea

$$\int_c^{c_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

are loc pentru toţi $\ell > L(\varepsilon)$. Acum, din (2.72), (2.73) şi iterata (2.74) tragem concluzia că

$$0 \leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy < \varepsilon$$

pentru toţi $\ell > L(\varepsilon)$, ceea ce trebuia să demonstrăm pentru a fi adevarată concluzia teoremei. ■

Dacă $f(x, y)$ din (2.68) nu are semn constant şi concluziile Teoremei 2.3.8 dorim să fie adevărate, atunci ipotezele Teoremei 2.3.8 trebuiesc modificate după cum urmează.

Teorema 2.3.9 **(Schimbarea ordinii de integrare întro integrală improprie iterată din funcţia f care schimbă de semn)** *Dacă f din* (2.68) *este o funcţie care îşi schimbă semnul de o infinitate de ori şi integralele improprii depinzând de un parametru:*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx; \quad J^*(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

sunt uniform convergente pe orice interval finit $c \leq y \leq C$ şi respectiv pe orice interval finit $a \leq x \leq A$, iar cel puţin una din integralele improprii iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx; \qquad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)|dy \tag{2.75}$$

este convergentă, atunci integralele iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx; \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy \tag{2.76}$$

sunt convergente şi

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \;=\; \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy.$$

Demonstraţie. Pentru precizare, presupunem că cea de a doua integrală din (2.75) este convergentă. Aplicând criteriul de comparaţie funcţiilor $f(x, y)$, $|f(x, y)|$, precum şi funcţiilor

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx, \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx,$$

deducem că cea de a doua integrală improprie din (2.76) este convergentă.

Mai avem de demonstrat că

$$\lim_{\ell\to+\infty} \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx. \tag{2.77}$$

Integrala improprie $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ fiind uniform convergentă, pe orice interval finit $[a, A]$ şi pentru orice număr finit $\ell > a$, avem

$$\int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{\ell} f(x, y)dx. \tag{2.78}$$

Să calculăm valoarea absolută a diferenţei dintre cantitatea variabilă $\int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ şi numărul $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ care intră în relaţia (2.77). Ţinând cont şi de (2.78), constatăm că au loc egalităţile şi inegalităţile

$$\begin{aligned} & |\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy| = \\ = & |\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_c^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x,y)dx| = \\ = & |\int_c^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| = \\ = & |\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| \le \\ \le & |\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} |f(x,y)|dx \le \\ \le & |\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx \end{aligned} \tag{2.79}$$

oricare ar fi $c_1 > c$. Din convergenţa integralei iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$$

rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $c_1 > c$ astfel încât

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.80}$$

Acum, fixând o valoare a lui $c_1 > c$ pentru care inegalitatea (2.80) are loc şi luând în consideraţie că integrala $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ este uniform convergentă, alegem, la fel ca în demonstraţia Teoremei 2.3.8, o cantitate $L(\varepsilon)$ astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea

$$\Big|\int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ şi pentru toţi $y \in [c, c_1]$. Atunci, avem

$$\Big|\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.81}$$

pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ şi, în consecinţă, în baza relaţiilor (2.79) (2.80) şi (2.81), se obţine inegalitatea

$$\Big| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \Big| < \varepsilon$$

oricare ar fi $\ell > L(\varepsilon)$, ceea ce trebuia să demonstrăm. ∎

Observaţia 2.3.6 *Teoreme similare au loc pentru integrale improprii de speţa a doua care depind de un parametru.*

Exerciţiul 2.3.2 *Să se arate că integrala lui* **Poisson**

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{2.82}$$

are valoarea egală cu $\sqrt{\pi}/2$.

Soluţie. În (2.82) facem substituţia $x = ut$ şi apoi înmulţim în ambii membri cu e^{-u^2}. Obţinem

$$I\, e^{-u^2} = \int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} dt.$$

Integrând în raport cu u pe intervalul $[0, +\infty)$ ambii membri ai acestei egalităţi şi ţinând cont de definiţia lui I, găsim

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} dt \Big) du. \tag{2.83}$$

În baza Teoremei 2.3.8 se poate schimba ordinea de integrare în (2.83) astfel că putem scrie

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} du \Big) dt. \tag{2.84}$$

Dar integrala din interior din membrul doi al relaţiei (2.84) este imediată pentru că se cunoaşte o primitivă a funcţiei de integrat şi valoarea sa este

$$\int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}. \tag{2.85}$$

Din (2.84) şi (2.85) obţinem

$$I^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

de unde găsim în final că valoarea integralei lui Poisson este $\sqrt{\pi}/2$. ∎

2.4 Criterii de convergenţă uniformă

Teorema 2.4.1 (**Condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă a integralelor improprii de speţa doua care depind de un parametru**) *Integrala improprie*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{2.86}$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L = L(\varepsilon)$ astfel încât inegalitatea

$$\Big|\int_{\ell'}^{\ell''} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon \tag{2.87}$$

are loc simultan pentru orice $\ell',\ \ell'' > L(\varepsilon)$ şi pentru orice $y \in [c,d]$.

Demonstraţie. Necesitatea. În ipoteza că integrala (2.4.1) este uniform convergentă, atunci aplicând Definiţia 2.3.1 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L = L(\varepsilon)$ astfel încât pentru toţi $\ell' > L(\varepsilon)$, $\ell'' > L(\varepsilon)$ şi $y \in [c,d]$ inegalităţile:

$$\Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}; \qquad \Big|\int_{\ell''}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sunt îndeplinite. Prin urmare, pentru orice $\ell',\ \ell'' > L(\varepsilon)$ şi pentru orice $y \in [c,d]$ obţinem inegalitatea

$$\Big|\int_{\ell'}^{\ell''} f(x,y)dx\Big| = \Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{\ell''}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| \leq$$
$$\leq \Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| + \Big|\int_{\ell''}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suficienţa. Dacă inegalitatea (2.87) are loc pentru orice $\ell',\ \ell'' > L(\varepsilon)$ şi pentru orice $y \in [c,d]$, conform criteriului general de convergenţă uniformă al lui Cauchy pentru integrale improprii, integrala improprie (2.86) este convergentă pentru orice $y \in [c,d]$. Prin urmare, trecând la limită pentru $\ell'' \to +\infty$ obţinem, pentru toţi $\ell' > L(\varepsilon)$, inegalitatea

$$\Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \tag{2.88}$$

care are loc $(\forall)\, y \in [c, d]$. Dar, în (2.88) recunoaştem definiţia uniformei convergenţe în raport cu parametrul y pe compactul $[c, d]$ a integralei improprii (2.86). ■

Teorema 2.4.1 este cunoscută sub numele de **criteriul general de convergenţă uniformă al lui Cauchy**.

Teorema 2.4.2 (Criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă a unei integrale improprii depinzând de un parametru). *Dacă*

$$|f(x, y)| \leq g(x), \quad (\forall)\ x \in [a, +\infty),\ y \in [c, d] \tag{2.89}$$

şi integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{2.90}$$

este convergentă, atunci integralele improprii

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \quad \text{şi} \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx$$

sunt uniform convergente în raport cu parametrul y pe intervalul $[c, d]$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din convergenţa integralei improprii (2.90) şi criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a integralelor improprii deducem existenţa lui $L = L(\varepsilon) > 0$ astfel încât condiţia

$$\int_{\ell'}^{\ell''} g(x)dx < \varepsilon \tag{2.91}$$

este satisfăcută pentru toţi ℓ', $\ell'' > L(\varepsilon)$ cu $\ell'' > \ell'$. Pe de altă parte din (2.89) şi proprietăţile integralelor definite, avem

$$\Big| \int_{\ell'}^{\ell''} f(x, y)dx \Big| \leq \int_{\ell'}^{\ell''} |f(x, y)|dx \leq \int_{\ell'}^{\ell''} g(x)dx. \tag{2.92}$$

Atunci, din (2.91), (2.92) şi Teorema 2.4.1 rezultă concluzia teoremei. ■

Criteriile corespunzătoare convergenţei uniforme a integralelor improprii depinzând de parametru din funcţii nemărginite şi limite finite de integrare se formulează şi se demonstrează întrun mod asemănător.

De exemplu, criteriul general al lui Cauchy de convergenţă uniformă a integralei improprii de speţa doua depinzând de un parametru, cu limita superioară punct singular, are formularea care urmează.

Teorema 2.4.3 (Condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă a integralelor improprii din funcţii nemărginite depinzând de un parametru). *Integrala improprie de speţa doua depinzând de un parametru*

$$J^*(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx, \quad c \le y \le d$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul y *pe intervalul* $[c,d]$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât pentru orice* λ' *şi* λ'' *aparţinând intervalului* $(0, \min\{b-a, \delta(\varepsilon)\})$ *inegalitatea*

$$\Big| \int_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon$$

este satisfăcută pentru orice $y \in [c,d]$.

Exemplul 2.4.1 *Să se evalueze funcţia*

$$J(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in I\!R. \tag{2.93}$$

Soluţie. Conform criteriului lui Weierstrass, integrala improprie depinzând de parametrii α şi β, definită în (2.93), este uniform convergentă în raport cu parametrul β pe orice interval compact din $I\!R$ deoarece

$$|e^{-\alpha x^2}\cos\beta x| \le e^{-\alpha x^2}$$

şi $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx$ este convergentă. Este permisă derivarea în raport cu β sub semnul integrală în $J(\alpha,\beta)$ deoarece în baza aceluiaşi criteriu integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\Big)dx = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul β pe orice interval compact din $I\!R$. Avem deci

$$\frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\sin\beta x\,\frac{d}{dx}\Big(e^{-\alpha x^2}\Big)dx.$$

Integrarea prin părţi în ultima integrală conduce la ecuaţia diferenţială simplă

$$\frac{\partial J}{\partial\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}\,J,$$

din care obţinem

$$J(\alpha,\beta) = C(\alpha)\, e^{-\dfrac{\beta^2}{4\,\alpha}}. \tag{2.94}$$

Rămâne să determinăm funcţia $\alpha \mapsto C(\alpha)$. Luând pentru β valoarea zero, găsim

$$C(\alpha) = J(\alpha, 0) = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha\, x^2} dx. \tag{2.95}$$

Ultima integrală se obţine din integrala lui Poisson după ce trecem pe x în $\sqrt{\alpha}x$:

$$J(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}\, x)^2} d(\sqrt{\alpha}\, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.96}$$

Din (2.94), (2.95) şi (2.96) rezultă

$$J(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha\, x^2} \cos\beta x dx \;\; = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\dfrac{\beta^2}{4\,\alpha}}.$$

■

Exemplul 2.4.2 *Să se calculeze valorile integralelor lui* **Fresnel**

$$\int_0^{+\infty} \sin{(x^2)} dx \qquad \textit{şi} \qquad \int_0^{+\infty} \cos{(x^2)} dx.$$

Soluţie. Punând $(x^2) = t$, obţinem:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin{(x^2)} dx &= \displaystyle\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt; \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos{(x^2)} dx &= \displaystyle\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt. \end{cases}$$

Din relaţiile (2.95) şi (2.96), în care punem $\alpha = t$ şi $x = u$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\,tu^2}\, du. \tag{2.97}$$

Înmulţind (2.97) cu funcţia $t \mapsto e^{-kt} \sin t$, $k > 0$, şi integrând pe $[0, +\infty)$ găsim

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, e^{-kt}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t\, du \Big) dt. \tag{2.98}$$

Dacă în (2.98) schimbăm ordinea de integrare şi ţinem cont de rezultatul

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt = \frac{1}{1+(k+u^2)^2},$$

simplu de demonstrat folosind de două ori metoda integrării prin părţi, ajungem la concluzia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, e^{-kt}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(k+u^2)^2}\,dt. \tag{2.99}$$

Trecând la limită în (2.99) pentru $k \to 0$ deducem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.100}$$

În acest mod se găseşte în final că valorile celor două integrale Fressnel sunt egale şi

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \;=\; \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

După cum s–a mai afirmat, integralele lui Fressnel sunt utilizate în optică. ■

Exemplul 2.4.3 *Pornind de la valoarea integralei improprii de prima speţă studiată în Exemplul* 1.12.3, *să se demonstreze, în baza Teoremei 2.3.5, că pentru* $0 < p < 1$ *are loc relaţia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{2.101}$$

Soluţie. Din (1.103), avem $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$. Dacă în această integrală efectuăm substituţia $x = t^{\frac{1}{2n}}$, obţinem

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{2.102}$$

Cu notaţia $p = \dfrac{2m+1}{2n}$ egalitatea precedentă devine

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \tag{2.103}$$

în care deocamdată p este număr raţional. Să extindem valorile pe care le poate lua p între 0 şi 1, considerând că $p \in I\!\!R \cap (0,1)$ şi să observăm că funcţia reală de două variabile reale $f(t) = \dfrac{t^{p-1}}{1+t}$ este continuă pe mulţimea $(0,+\infty) \times (0,1)$. Despărţind intervalul de integrare în subintervalele $(0,1]$ şi $[1,+\infty)$ şi aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor improprii depinzând de parametrul p

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}dt \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$$

în care funcţiile $g(t)$ sunt respectiv egale cu

$$g(t) = \frac{t^{p_1-1}}{1+t} \quad \text{şi} \quad g(t) = \frac{t^{p_2-1}}{1+t},$$

unde $0 < p_1 \leq p_2 < 1$, vedem că integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval compact $[p_1, p_2]$. În baza Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$ este o funcţie continuă de paramatrul p pe intervalul $(0,1)$. Cum orice număr real este limita unui şir de numere raţionale putem afirma că $p \in (0,1)$ este limita pentru $m \to +\infty$ şi $n \to +\infty$ a şirului numeric cu termenul general egal cu $\dfrac{2m+1}{2n}$, unde $0 < m < n$. Trecând la limită în (2.102) pentru $m \to +\infty$ şi $n \to +\infty$ ajungem la egalitatea (2.101), care trebuia să o demonstrăm. ■

2.5 Integrale Cauchy–Frullani

Definiţia 2.5.1 *Se numeşte* **integrală Cauchy–Frullani**[1] *integrala improprie de speţa întâi depinzând de doi parametri*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}dx, \tag{2.104}$$

unde $0 < a < b < +\infty$.

[1]Frullani, Giuliano (1795 – 1834), matematician italian.

Teorema 2.5.1 *Dacă* $f \in C^1([0,+\infty))$, *derivata* f' *este integrabilă în sens generalizat şi* f *are limita finită* $f(+\infty)$ *când* $x \to +\infty$, *atunci*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \Big[f(+\infty)-f(0)\Big]\ln\frac{b}{a}. \tag{2.105}$$

Demonstraţie. Din ipotezele f' este integrabilă în sens generalizat şi f are limită la infinit, în urma aplicării formulei Leibniz-Newton de calcul a unei integrale improprii de speţa întâi convergente, deducem

$$\int_0^{+\infty} f'(x)dx = f(+\infty)-f(0). \tag{2.106}$$

În baza criteriului lui Cauchy, aceleaşi ipoteze asigură uniforma convergenţă a integralei improprii

$$J(u) = \int_0^{+\infty} f'(ux)dx \tag{2.107}$$

în raport cu parametrul u pe intervalul $[a,b]$.

Într-adevăr, din Teorema Bolzano–Cauchy de existenţă a limitei finite a funcţiei f în punctul de la infinit rezultă că oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $N(\varepsilon)>0$ astfel încât oricare ar fi $x',x''>N(\varepsilon)$, avem

$$|f(x')-f(x'')|<a\varepsilon. \tag{2.108}$$

Schimbarea de variabilă $ux=t$ în integrala definită $\displaystyle\int_{A'}^{A''} f'(ux)dx$, urmată de integrarea prin părţi şi utilizarea inegalităţii (2.108), conduce la

$$\begin{aligned} \Big|\int_{A'}^{A''} f'(ux)dx\Big| &= \Big|\frac{1}{u}\int_{A'u}^{A''u} f'(t)dt\Big| \\ \Big|\frac{f(A''u)-f(A'u)}{u}\Big| &\le \frac{1}{a}|f(A''u)-f(A'u)|<\varepsilon \end{aligned} \tag{2.109}$$

oricare ar fi $A',A''>\dfrac{1}{a}N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi u din intervalul $[a,b]$. În baza criteriului lui Cauchy de convergenţă uniformă a unei integrale improprii depinzând de un parametru rezultă că integrala (2.107) este uniform convergentă în raport cu parametrul u pe intervalul $[a,b]$, iar valoarea sa este

$$\int_0^{+\infty} f'(ux)dx = \frac{f(bx)-f(ax)}{x}. \tag{2.110}$$

Având în vedere (2.110), rezultă că putem scrie

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux)du. \tag{2.111}$$

Aplicând Teorema 2.3.7 în ultima integrală din (2.111), obţinem

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux)du = \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux)dx. \tag{2.112}$$

În ultima integrală din (2.112) efectuăm schimbarea de variabilă $ux = t$ şi folosim (2.106). Obţinem

$$\begin{aligned} \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux)dx = \int_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{u} du = \\ = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Relaţiile (2.112) şi (2.113) conduc la (2.105). ∎

Teorema 2.5.2 *Dacă funcţia reală de variabilă reală $f : [0, +\infty) \to I\!R$ nu are limită finită în punctul de la infinit, însă integrala improprie de tipul întâi $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, unde $A > 0$, este convergentă şi f este derivabilă în origine, atunci*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{2.114}$$

Demonstraţie. Integralele depinzând de parametrul s :

$$\int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt; \quad \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt, \tag{2.115}$$

sunt proprii, singularitatea în origine fiind aparentă deoarece funcţia de sub semnul integrală poate fi prelungită la toată semiaxa $[0, +\infty)$ atribuindu–i ca valoare în origine limita sa în origine care este $f'(0)$, ce din ipoteză există. Efectuând schimbările de variabilă $t = ax$ în prima integrală (2.115) şi $t = bx$ în cea de a doua, avem

$$\begin{aligned} \int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^{s} \frac{f(ax) - f(0)}{x} dx, \\ \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^{s} \frac{f(bx) - f(0)}{x} dx. \end{aligned} \tag{2.116}$$

În consecinţă,

$$\int_0^s \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t}dt - f(0)\int_{as}^{bs}\frac{dt}{t} = \\ = \int_{as}^{bs}\frac{f(t)}{t}dt - f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{2.117}$$

Ultima integrală din (2.117) poate fi facută oricât de mică de îndată ce s este foarte mare, ceea ce înseamnă că

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^s \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = -f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{2.118}$$

Definiţia convergenţei unei integrale improprii de speţa întâi şi relaţia (2.118) demonstrează egalitatea (2.114). ∎

Exerciţiul 2.5.1 *Folosind eventual integralele Cauchy–Frullani, să se studieze următoarele integrale improprii depinzând de parametri şi în caz de convergenţă să se precizeze valorile acestora:*

$$a)\quad I_1(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx,\quad 0<a<b;$$

$$b)\quad I_2(a,b,p,q) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{p+q\,e^{-bx}}{p+q\,e^{-ax}}dx,\ \ p,q>0,\quad 0<a<b;$$

$$c)\quad I_3(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(bx)-\operatorname{arctg}(ax)}{x}dx,\quad 0<a<b;$$

$$d)\quad I_4(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x}dx,\quad 0<a<b;$$

$$e)\quad I_5(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)}{x}dx,\ \ \alpha\neq\pm\beta;$$

$$f)\quad I_6(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x^2}dx,\quad 0<a<b;$$

$$g)\quad I_7(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-b^2x^2} - e^{-a^2x^2}}{x^2}dx, \quad 0 < |a| < |b|;$$

$$h)\quad I_8(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+b^2x^2) - \ln(1+a^2x^2)}{x^2}dx, \quad 0 < |a| < |b|;$$

$$i)\quad I_9(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{a\ln(1+bx) - b\ln(1+ax)}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$j)\quad I_{10}(a,b) = \int_a^{b} \frac{1-\cos(bx)}{x}\cos(ax)dx, \quad a \neq b;$$

$$k)\quad I_{11}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{a\sin(bx) - b\sin(bx)}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$l)\quad I_{12}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx^n} - e^{-ax^n}}{x}dx, \quad n > 0, a > 0, b > 0;$$

$$m)\quad I_{13}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-bx} - e^{-ax})^2}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$n)\quad I_{14}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax} + x(b-a)e^{-ax}}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$o)\quad I_{15}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x}dx, \quad 0 < a < b.$$

Soluţie. După cum vom constata, unele din integralele de mai sus ori sunt integrale Cauchy–Frullani de tipul celor descrise în Teorema 2.5.1 şi Teorema 2.5.2, ori se reduc la una din acestea.

a) Fie $f : [a, +\infty) \to I\!\!R$, $f(x) = e^{-x}$. Rezultă că această funcţie satisface ipotezele Teoremei 2.5.1. Deci

$$I_1(a,b) = [f(+\infty) - f(0)]\ln\frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad I_1(a,b) = \ln\frac{a}{b};$$

b) Înlocuind logaritmul câtului cu diferenţ logaritmilor numărătorului şi numitorului se deduce că funcţia f din Teorema 2.5.1 este $f(x) = \ln(p + q\,e^{-x})$. Deoarece $f(0) = \ln(p+q)$ şi $f(+\infty) = \ln p$, rezultă că

$$I_2(p,q,a,b) = \ln(1 + \frac{q}{p})\ln\frac{a}{b};$$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ f(0) = 0,\ f(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$, deci $I_3(a,b) = \dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{b}{a}$;

d) $f(x) = \cos x,\ f(0) = 1$. Nu există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, în schimb integrala improprie de speţa întâi $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$, unde $A > 0$, este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet (vezi Teorema 1.11.2)). Prin urmare, conform Teoremei 2.5.2, avem $I_4(a,b) = \ln\dfrac{a}{b}$.

e) Deoarece $\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \dfrac{\cos|\alpha-\beta|x - \cos|\alpha+\beta|x}{2}$, rezultă că $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x,\ a = |\alpha+\beta|$ şi $b = |\alpha-\beta|$. Prin urmare $I_5(a,b) = \dfrac{1}{2}\ln\Big|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\Big|$.

f) Scriind $\dfrac{1}{x^2} = \Big(-\dfrac{1}{x}\Big)'$ şi aplicând metoda integrării prin părţi, avem

$$\begin{aligned}
I_6(a,b) &= -\int_0^{+\infty}(\cos(bx) - \cos(ax))(\frac{1}{x})'dx = \\
&= -\frac{1}{x}(\cos(bx) - \cos(ax))\Big|_0^{+\infty} + \\
&+ \int_0^{+\infty}\frac{a\sin(ax) - b\sin(bx)}{x}dx = (a-b)\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.
\end{aligned}$$

Integrala la care s–a ajuns este integrala lui Dirichlet, a cărei valoare, conform relaţiei (2.51)), este $\dfrac{\pi}{2}$. Prin urmare, $I_6(a,b) = \dfrac{\pi}{2}(a-b)$.

g) Procedând ca la punctul precedent, obţinem

$$\begin{aligned}
I_7(a,b) &= -\frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{a^2xe^{-a^2x^2} - b^2xe^{-b^2x^2}}{x}dx = \\
&= 2a^2\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2}dx - 2b^2\int_0^{+\infty}e^{-b^2x^2}dx = \\
&= 2(a-b)\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt.
\end{aligned}$$

Ultima integrală este integrala Euler-Poisson (vezi Exemplul 2.3.2) a cărei valoare este $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Deci, $I_7(a,b) = (a-b)\sqrt{\pi}$.

h) Se integrează prin părţi şi se găseşte

$$\begin{aligned} I_8(a,b) &= 2b^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+b^2x^2}dx - 2a^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2x^2}dx = \\ &= 2b\,\mathrm{arctg}\,(bx)\Big|_0^{+\infty} - 2a\,\mathrm{arctg}\,(ax)\Big|_0^{+\infty} = \pi(b-a). \end{aligned}$$

i) Pentru calculul integralei $I_9(a,b)$ observăm că se poate scrie

$$I_9(a,b) = ab\int_0^{+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+bx)}{bx} - \dfrac{\ln(1+ax)}{ax}}{x}dx.$$

Funcţia $f(x)$ din Teorema 2.5.1 este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dacă} \quad x \in [0,+\infty) \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ şi $f(0) = 1$. Prin urmare, $I_9(a,b) = ab\ln\dfrac{a}{b}$.

j) Integrala $I_{10}(a,b)$ se poate scrie în forma

$$\begin{aligned} I_{10}(a,b) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax) - \cos(a+b)x}{x}dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(bx) - \cos|a-b|x}{x}dx. \end{aligned}$$

Ambele integrale fiind integrale Cauchy–Frullani de tipul celei din Teorema 2.5.1, rezultă că

$$I_{10}(a,b) = \frac{1}{2}\ln\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\ln\frac{a}{|a-b|} = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2}{|a^2-b^2|}.$$

k) Mai întâi, avem

$$I_{11}(a,b) = ab\int_0^{+\infty}\frac{\dfrac{\sin(ax)}{ax} - \dfrac{\sin(bx)}{bx}}{x}dx.$$

Apoi, se vede că funcţia f din Teorema 2.5.1 este

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă} \quad x\in[0,+\infty)\\ \\ 1, & \text{dacă} \quad x=0,\end{cases}$$

iar $\lim\limits_{x\to+\infty}=0$. Prin urmare, $I_{11}(a,b)=ab\ln ab$.

l) Scriem întâi

$$I_{12}(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\,bx^n}-e^{-\,ax^n}}{x}x^{n-1}dx$$

şi apoi efectuăm schimbarea de variabilă $x^n=t$. Obţinem

$$I_{12}(a,b)=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}dt.$$

Folosim acum $I_1(a,b)$. Prin urmare, $I_{12}(a,b)=\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{a}{b}$.

m) Se aplică metoda integrării prin părţi şi obţinem

$$I_{13}(a,b)=2a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(a+b)x}-e^{-2ax}}{x}dx+2b\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(a+b)x}-e^{-2bx}}{x}dx.$$

Ambele integrale sunt integrale Cauchy–Frullani care se încadrează în Teorema 2.5.1. În acest mod valoarea integralei iniţiale este

$$I_{13}(a,b)=\ln\frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}.$$

n) Se integrează prin părţi şi se ajunge la

$$I_{14}(a,b)=b\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx-a(b-a)\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx.$$

Prima integrală este integrală Cauchy–Frullani, iar a doua este imediată. Se obţine

$$I_{14}(a,b)=b\ln\frac{b}{a}+a-b.$$

o) $I_{15}(a,b)$ este diferenţa a două integrale Dirichlet. Într-adevăr,

$$I_{15}(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin{(bx)}}{bx}d(bx)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin{(ax)}}{ax}d(ax).$$

Fiecare integrală are valoarea $\frac{\pi}{2}$, deci $I_{15}(a,b) = 0$. Această integrală este totodată integrală Cauchy–Frullani care se încadrează în Teorema 2.5.2, funcţia f fiind $f(x) = \sin x$. Pentru că valoarea în $x = 0$ a funcţiei f este nulă rezultă că $I_{15}(a,b) = 0$. ■

2.6 Integralele lui Euler

2.6.1 Definiţiile funcţiilor Beta şi Gama

Definiţia 2.6.1 *Integrala depinzând de parametrii p şi q,*

$$B(p.q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{2.119}$$

se numeşte **integrala Euler de primul tip** *sau* **funcţia Beta**.

Definiţia 2.6.2 *Integrala improprie depinzând de parametrul p,*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \tag{2.120}$$

se numeşte **integrala Euler de tipul al doilea** *sau* **funcţia Gama**.

Funcţiile (2.119) şi (2.120) joacă un rol important în diferite domenii ale matematicii şi ale matematicii fizice. După cum se va arăta, funcţia Beta se exprimă în funcţie de funcţia Gama şi din acest motiv vom prezenta mai întâi proprietăţile funcţiei Gama.

2.6.2 Proprietăţi ale funcţiei Gama

Teorema 2.6.1 *Integrala improprie* (2.120) *este convergentă pentru* $0 < p < +\infty$, *divergentă pentru* $p \leq 0$ *şi uniform convergentă în raport cu parametrul* p *pe orice compact* $[p_0, P]$, *unde* $0 < p_0 < P < +\infty$.

Demonstraţie. Dacă $p - 1 < 0$, integrandul din (2.120) are un punct singular în limita inferioară. Să despărţim intervalul de integrare în două subintervale, de exemplu $[0,1]$ şi $[1,+\infty)$, prin intermediul punctului $x = 1$. Avem

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx. \tag{2.121}$$

Primul termen din membrul doi al egalităţii (2.121) este o integrală improprie de speţa a doua dacă $p-1<0$, cu punctul singular în limita inferioară. Scriind această integrală în forma $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}dx$ şi aplicând criteriul de comparaţie în α, formularea cu limită, deducem că integrala este convergentă dacă $1-p<1$, adică dacă $p>0$, şi divergentă dacă $p\le 0$.

Cel de al doilea termen din membrul al doiea al egalităţii (2.121) este o integrală improprie de speţa întâi convergentă pentru toate valorile reale ale lui p. Într-adevăr, pentru a arăta aceasta să remarcăm că egalităţile

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 x^{p-1}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = (p+1)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

sunt satisfăcute pentru orice $p\in I\!R$.

În consecinţă, integrala improprie $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este convergentă pentru orice $p>0$ şi divergentă pentru $p\le 0$.

Să demonstrăm că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval finit $[p_0,P_0]$, unde $0<p_0\le P_0<+\infty$. Ca şi în cazul convergenţei obişnuite a acestei integrale, scriem $[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$ şi studiem convergenţa uniformă în raport cu parametrul p a integralelor improprii

$$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Când $p\ge p_0>0$ şi $x\in[0,1]$, funcţia de integrat satisface inegalitatea $x^{p-1}e^{-x}\le x^{p_0-1}$, iar integrala $\int_0^1 x^{p_0-1}dx$ este convergentă dacă $p_0>0$ şi are valoarea $1/p_0$.

Conform criteriului lui Weierstrass de convergenţă a integralelor improprii depinzând de un parametru, rezultă că integrala $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe intervalul $[p_0,+\infty)$, unde $p_0>0$.

Evaluând integrala $\int_0^\lambda x^{p-1}e^{-x}dx$ pentru $p\to 0+0$ şi $\lambda=$const>0 se observă că

$$\int_0^\lambda x^{p-1}e^{-x}dx \ge e^{-1}\int_0^\lambda x^{p-1}dx = \frac{\lambda^p}{pe}\to+\infty$$

şi, în consecinţă, putem afirma că integrala $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ nu este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe intervalul $(0,+\infty)$.

Tot datorită criteriului lui Weierstrass rezultă că integrala improprie de speţa întâi $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval de forma $(-\infty, P_0]$, unde $P_0 < +\infty$, deoarece

$$x^{p-1}e^{-x} \leq x^{P_0-1}e^{-x} \quad \text{pentru} \quad 1 \leq x < +\infty, \quad -\infty < p \leq P_0$$

şi integrala $\int_1^{+\infty} x^{P_0-1}e^{-x}dx$ este convergentă.

Integrala improprie $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ nu converge uniform în raport cu parametrul p pe intervalul $(-\infty, +\infty)$. Pentru a justifica această afirmaţie, evaluăm integrala $\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ pentru $\ell > 1$ arbitrar, dar fixat şi pentru valori mari ale lui p, deci pentru $p \to +\infty$. Pentru orice număr întreg $N > 0$ găsim valori ale lui p astfel încât $p-1 > N$, deoarece $p \to +\infty$. Prin urmare, pentru astfel de p se poate scrie

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx > \int_\ell^{+\infty} x^N e^{-x}dx = -\,e^{-x}x^N\Big|_{x=\ell}^{+\infty} + N\int_\ell^{+\infty} x^{N-1}e^{-x}dx.$$

Aplicând repetat integrarea prin părţi pentru calculul integralei improprii $\int_\ell^{+\infty} x^{N-1}e^{-x}dx$ în final se găseşte

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx > (\ell^N + N\ell^{N-1} + N(N-1)\ell^{N-2} + \cdots + N!)e^{-1} \to +\infty$$

când $N \to +\infty$. În consecinţă,

$$\lim_{p\to+\infty} \int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = +\infty, \quad (\forall)\ \ell > 0.$$

Astfel, integrala improprie $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval $[p_0, +\infty)$ cu $p_0 > 0$ arbitrar, dar fixat, iar integrala imroprie $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă pe orice interval $(-\infty, P_0]$, unde P_0 este un număr finit, arbitrar.

Aşadar, ambele integrale sunt simultan uniform convergente în raport cu parametrul p pe orice compact $[p_0, P_0]$, unde $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$, ceea ce dovedeşte că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice compact $[p_0, P_0]$, ceea ce trebuia de demonstrat. ■

Teorema 2.6.2 *Funcţia* Γ *definită în* (2.120) *este o funcţie continuă pe intervalul* $(0, +\infty)$.

Demonstraţie. Funcţia de integrat, $f(x,p) = x^{p-1}e^{-x}$, este continuă pe mulţimea $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, iar conform Teoremei 2.6.1 integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval finit $[p_0, P_0]$, unde $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$. Prin urmare, conform Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este funcţie continuă pe intervalul $(0, +\infty)$. ∎

Teorema 2.6.3 *Funcţia* Γ *definită în* (2.120) *este infinit diferenţiabilă, derivata de ordin* k *exprimându–se prin integrala improprie depinzând de parametrul* p

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}dx, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.122}$$

Demonstraţie. Derivarea formală în raport cu parametrul p în (2.120) conduce la egalitatea

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx. \tag{2.123}$$

Egalitaea (2.123) poate fi justificată arătând că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval finit $[p_0, P_0]$, unde $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$, iar derivata parţială în raport cu variabila p a funcţiei de integrat $f(x,p) = x^{p-1}e^{-x}$ este o funcţie continuă pe mulţimea $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Faptul că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice compact $[p_0, P_0]$ se demonstrează aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor

$$\int_0^1 x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx,$$

funcţiile $g(x)$ din integralele $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ şi $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)dx$ fiind date respectiv de

$$g(x) = x^{P_0-1}|\ln x| \quad \text{şi} \quad g(x) = x^{P_0-1}|\ln x|e^{-x}.$$

Pentru obţinerea derivatei secunde a funcţiei $\Gamma(p)$ se aplică raţionamentul de mai sus funcţiei $\Gamma'(p)$ din (2.123). Din aproape în aproape se obţine (2.122) şi teorema este demonstrată. ∎

Să stabilim acum o formulă de recurenţă pentru funcţia Γ. Aplicând în (2.120) formula integrării prin părţi, obţinem

$$p\Gamma(p) = \lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x} - \lim_{x\to 0+0} x^p e^{-x} + \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx.$$

Însă, aplicând o teoremă de tip Hospital, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x} = \lim_{x\to 0+0} x^p e^{-x} = 0,$$

deci

$$p\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx,$$

adică

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{2.124}$$

Aplicând în mod repetat această relaţie de recurenţă, obţinem

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\Gamma(p). \tag{2.125}$$

Din (2.125) rezultă că este suficient să cunoaştem valorile funcţiei Γ pentru orice p pozitiv şi subunitar pentru a obţine valorile lui Γ pentru toate celelalte valori pozitive ale lui p. De exemplu

$$\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}+2\Big) = \Big(\frac{1}{2}+2-1\Big)\Big(\frac{1}{2}+2-2\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big). \tag{2.126}$$

Pentru a finaliza relaţia (2.126) este necesar să ştim valoarea lui $\Gamma(p)$ pentru $p = \dfrac{1}{2}$,

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx. \tag{2.127}$$

Punând în (2.127) $x = t^2$ şi ţinând cont de integrala Poisson, obţinem

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \tag{2.128}$$

Din (2.126) şi (2.128) rezultă $\Gamma\Big(\dfrac{5}{2}\Big) = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Luând, în (2.125), $p = 1$ şi ţinând seama că

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \tag{2.129}$$

rezultă

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{2.130}$$

Cu alte cuvinte, funcţia Γ este, întrun anume sens, o generalizare a noţiunii de factorial; putem spune că prin intermediul funcţiei Γ noţiunea de factorial capătă sens pentru orice număr pozitiv.

Funcţia Γ este de cea mai mare importanţă în analiză. Ultima proprietate stabilită face să se întrevadă această importanţă.

Teorema 2.6.4 *Există o valoare p_0 a lui p, în intervalul $(1,2)$, astfel încât funcţia $\Gamma(p)$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0,p_0)$ şi strict crescătoare pe $(p_0,+\infty)$.*

Demonstraţie. Din expresia (2.119) a funcţiei $\Gamma(p)$ deducem că, pentru $p>0$, valorile sale sunt pozitive. De asemenea, din (2.124) avem

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

pentru $p>0$ şi deci $\Gamma(p)\to+\infty$ pentru $p\to 0+0$ deoarece $\Gamma(p+1)\to\Gamma(1)=1$ pentru $p\to 0+0$. Mai mult, se poate arăta că $\lim\limits_{p\to+\infty}\Gamma(p)=+\infty$.

Observând că din relaţiile (2.128) şi (2.129) avem că $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ şi folosind Teorema 2.6.1 şi Teorema 2.6.2, constatăm că pe intervalul $[1,2]$ funcţia Γ satisface ipotezele Teoremei lui Rolle. Conform acestei teoreme derivata $\Gamma'(p)$ se anulează întrun punct $p_0\in(1,2)$. Deoarece $\Gamma''(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^2 e^{-x}dx>0$ pentru orice $p>0$ rezultă că derivata $\Gamma'(p)$ este o funcţie monoton crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$. În consecinţă, derivata $\Gamma'(p)$ nu are alte rădăcini, în afară de p_0, în intervalul $(0,+\infty)$. În plus, $\Gamma'(p)<0$ pentru $p<p_0$ şi $\Gamma'(p)>0$ pentru $p>p_0$ deoarece $\Gamma'(p)$ este o funcţie monoton crescătoare. Deci, funcţia $\Gamma(p)$ are numai o valoare extremă pe intervalul $0<p<+\infty$, şi anume un minim în punctul $p=p_0$.

2.6.3 Proprietăţi ale funcţiei Beta

Teorema 2.6.5 *Integrala improprie de speţa a doua* (2.119) *este convergentă pentru $p>0$ şi $q>0$.*

Demonstraţie. Dacă $p\geq 1$ şi $q\geq 1$, funcţia de sub semnul integrală este continuă pe $[0,1]$, deci integrala are sens chiar pe $[0,1]$ ceea ce arată că (2.119)

este o integrală definită sau proprie. Dacă cel puţin unul din numerele p şi q este mai mic decât 1, integrala (2.119) este una improprie de speţa a doua şi pentru studiul naturii acesteia vom descompune intervalul de integrare prin intermediul punctului 1/2.

Dacă $p < 1$, atunci din cele două integrale care rezultă după descompunerea intervalului $[0, 1]$, integrala

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} dx$$

este improprie de speţa a doua cu limita inferioară punct singular. Aplicând criteriul de comparaţie în α, în varianta cu limită, constatăm că pentru $1-p < 1$, deci pentru $p > 0$, această integrală este convergentă.

Dacă $q < 1$, atunci integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} dx$$

este improprie de speţa a doua cu limita superioară punct singular. Aplicând acelaşi criteriu de comparaţie, deducem că integrala este convergentă pentru $1 - q < 1$, deci pentru $q > 0$.

Deci, pentru $p > 0$, $q > 0$, integrala (2.119) este convergentă. Prin urmare, putem spune că funcţia $B(p, q)$ este definită în porţiunea de plan cu ambele coordonate strict pozitive. ■

Teorema 2.6.6 *Funcţia Beta este simetrică în variabilele sale p şi q, adică*

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{2.131}$$

Demonstraţie. În integrala (2.119) efectuăm schimbarea de variabilă $x = 1 - t$ şi constatăm că are loc (2.131). ■

Să aplicăm integralei (2.119) teorema de schimbare de variabilă pentru integrale pe interval necompact, punând

$$x = \varphi(u) = \frac{u}{1+u}. \tag{2.132}$$

Funcţia φ este derivabilă, cu derivată continuă pe $(0, +\infty)$, şi aplică intervalul $(0, +\infty)$ pe intervalul $(0, 1)$. Din faptul că derivata

$$\varphi'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$$

este pozitivă pe $(0, +\infty)$, rezultă că φ este funcţie strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, deci toate condiţiile pentru aplicarea schimbării de variabilă definită de (2.132) sunt îndeplinite. Avem

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p-1}(1+u)^{q-1}(1+u)^2}du =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du,$$

deci

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du. \tag{2.133}$$

Integrala din membrul doi al relaţiei (2.133) o scriem în forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du, \tag{2.134}$$

iar în cea de a doua integrală din membrul doi al acestei egalităţi efectuăm schimbarea de variabilă $u = \dfrac{1}{y}$. Obţinem

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy. \tag{2.135}$$

Din (2.133), (2.134) şi (2.135) deducem o nouă expresie pentru valorile funcţiei Beta, şi anume

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{u^{p-1} + u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$$

Această expresie arată că funcţia Beta este de fapt o integrală improprie cu punctul singular doar în limita inferioară.

Teorema 2.6.7 *Dacă $q > 1$, atunci funcţia Beta satisface relaţia de recurenţă*

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), \tag{2.136}$$

iar dacă $p > 1$, atunci

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q). \tag{2.137}$$

Demonstraţie. Să presupunem întâi că $q > 1$. Scriind că $x^{p-1} = \left(\dfrac{x^p}{p}\right)'$ şi aplicând integralei (2.119) teorema de integrare prin părţi pentru integrale improprii, obţinem

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx. \tag{2.138}$$

Utilizând în (2.138) identitatea $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$, deducem

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q),$$

de unde rezultă (2.136).

Ţinând seama de (2.136 şi presupunând că $p > 1$, în baza relaţiei de simetrie (2.131), avem (2.137) şi teorema este demonstrată. ∎

Aplicând în mod succesiv formula (2.136) pentru diferite valori naturale ale lui q, obţinem

$$B(a,n) = \frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\cdots\frac{1}{p+1}\cdot B(p,1).$$

Însă $B(p,1) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}dx = 1/p$, deci, ţinând seama de (2.131), obţinem

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}. \tag{2.139}$$

Luând în rolul lui p un număr natural m, din (2.139) rezultă, multiplicând numărătorul şi numitorul cu $(m-1)!$,

$$B(m,n) = B(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

2.6.4 Relaţie între funcţiile Beta şi Gama

Să cercetăm acum dacă între funcţiile Beta şi Gama există vreo relaţie. Pentru aceasta vom avea nevoie de o altă expresie a funcţiei Γ şi în acest sens vom aplica integralei (2.120) teorema de schimbare de variabilă, punând $x = \varphi(u) = \ln\dfrac{1}{u}$. Această funcţie aplică intervalul $(0,1)$ pe intervalul $(+\infty, 0)$.

De asemeni, φ este strict monotonă pe $(0,1)$, derivabilă, cu derivată continuă pe $(0,1)$ şi $\varphi'(u) = -1/u$. Avem

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = -\int_1^0 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} e^{-\frac{1}{u}} \frac{1}{u} du =$$

$$= -\int_1^0 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} du = \int_0^1 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} du,$$

de unde rezultă

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} du. \tag{2.140}$$

Pe de altă parte, funcţia $\ln\frac{1}{u}$ este limita unui şir de funcţii reale (f_n), cu termenul general funcţia continuă $f_n = n\Big(1 - u^{\frac{1}{n}}\Big)$, definită pe intervalul $(0,+\infty)$. Deci,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1 - u^{\frac{1}{n}}\Big) = \ln\frac{1}{u}. \tag{2.141}$$

Şirul de funcţii (f_n) este strict crescător deoarece funcţia reală de variabila reală x definită pe intervalul $(0,+\infty)$, cu valorile date de $\dfrac{1-e^x}{x}$ este crescătoare, având derivata pozitivă. În plus, funcţia $\ln\frac{1}{u}$ este continuă şi prin urmare, conform Teoremei 2.3.1, convergenţa şirului de funcţii (f_n) este uniformă. Putem deci aplica teorema de trecere la limită sub semnul integrală şi obţinem, în baza relaţiilor (2.140) şi (2.141),

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} n^{p-1} \int_0^1 \Big(1 - u^{\frac{1}{n}}\Big) du.$$

Făcând în ultima integrală schimbarea de variabilă $u = y^n$, obţinem

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} n^p \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{p-1} dy = \lim_{n\to+\infty} n^p B(n,p). \tag{2.142}$$

Ţinând seama de relaţia (2.139), rezultă

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} n^p \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}. \tag{2.143}$$

Relaţiile (2.142) şi (2.143) stabilesc, între funcţiile B şi Γ, o legătură mijlocită de o trecere la limită.

Să stabilim o legătură mai simplă între aceste două funcţii. În acest scop, aplicăm integralei (2.120) schimbarea de variabilă $x = ty$, unde $t \geq 0$. Obţinem

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-\,ty} dy. \tag{2.144}$$

Înlocuind în (2.144) pe p cu $p+q$, în care $q > 0$, şi pe t cu $1+t$, găsim

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-\,(1+t)y} dy. \tag{2.145}$$

Înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu t^{p-1} şi integrând, în raport cu t, pe intervalul $(0, +\infty)$, obţinem

$$\begin{aligned} &\Gamma(p+q) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-\,(1+t)y} dy. \end{aligned} \tag{2.146}$$

Însă, în baza relaţiei (2.133), integrala din primul membru al egalităţii (2.146) este egală cu $B(p,q)$, astfel că putem scrie

$$\Gamma(p+q) \cdot B(p,q) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}\, t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy. \tag{2.147}$$

Să demonstrăm acum că este permisă schimbarea ordinii de integrare în integrala din membrul al doilea al relaţiei (2.147) pentru $p > 1$ şi $q > 1$. Pentru aceasta trebuie să arătăm că cele cinci ipoteze ale Teoremei 2.3.8 asupra schimbării ordinii de integrare întro integrală iterată sunt îndeplinite. Întradevăr:

(a) funcţia

$$f(y,t) = y^{p+q-1}\, t^{p-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$$

este continuă pentru $0 \leq y < +\infty$, $0 \leq t < +\infty$;

(b) dacă $p > 1$ şi $q > 1$ integrala din membrul doi al relaţiei (2.146) este convergentă;

(c) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y,t) dy = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-\,(1+t)y} dy$$

este o funcţie continuă de variabila t pe intervalul $(0, +\infty)$ deoarece, în baza relaţiei (2.145), avem

$$\int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(p+q) \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}},$$

iar Γ, după Teorema 2.6.1, este funcţie continuă;

(d) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dt \qquad (2.148)$$

este de asemeni o funcţie continuă pe intervalul $(0, +\infty)$ deoarece din (2.148) avem mai întâi

$$\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt,$$

iar apoi, după schimbarea de variabilă $u = ty$,

$$\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = y^{q-1} e^{-y} \cdot \Gamma(p), \qquad (2.149)$$

membrul doi al acestei relaţii fiind o funcţie continuă de y pe intervalul $(0, +\infty)$;

(e) integrala improprie de prima speţă

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(y,t)dt$$

este convergentă deoarece, conform egalităţii (2.149) şi definiţiei (2.120) a funcţiei $\Gamma(q)$, avem

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(y,t)dt = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q), \qquad (2.150)$$

iar membrul al doilea este număr real. În consecinţă, integrala iterată

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(y,t)dy = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}\, t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy \qquad (2.151)$$

este convergentă şi egală cu integrala din primul membru al egalităţii (2.152). Aşadar, din (2.147), (2.152) şi (2.151) deducem că pentru $p > 1$ şi $q > 1$ are loc identitatea

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad (2.152)$$

numită *formula lui Jacobi* ce dă legătura între funcţiile B şi Γ ale lui Euler.

Pentru a extinde relaţia (2.150) la toţi $p > 0$ şi $q > 0$ scriem din nou această relaţie pentru $p > 1$ şi $q > 1$ şi aplicăm apoi formulele de recurenţă (2.136) şi (2.137) membrului său stâng şi formula de recurenţă (2.124) membrului drept.

Dacă în relaţia (2.133) considerăm că $q = 1 - p$, atunci ea devine

$$B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{1+u} du, \tag{2.153}$$

unde $0 < p < 1$. În Exemplul 2.4.3 (vezi relaţia (2.101)) am arătat că integrala din (2.153) are valoarea $\dfrac{p}{\sin p\pi}$, prin urmare avem

$$B(p, 1-p) = \frac{p}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \tag{2.154}$$

Relaţia de recurenţă (2.152), împreună cu (2.129) şi (2.152) conduc la relaţia importantă

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \tag{2.155}$$

Exerciţiul 2.6.1 *Folosind funcţiile lui Euler, să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

Soluţie. Se observă că $I = B\Big(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\Big)$, iar dacă folosim relaţia (2.152), obţinem

$$I = \frac{\Gamma\Big(\dfrac{5}{4}\Big) \cdot \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big)}{\Gamma(2)}. \tag{2.156}$$

Conform relaţiei de recurenţă (2.124), avem:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \Gamma(\frac{1}{4}).$$

Dacă introducem aceste valori în (2.156) şi folosim (2.155), găsim

$$I = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

■

Exercițiul 2.6.2 *Să se calculeze integrala* $J = \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{5}{2}} x \cdot \cos^{\frac{3}{2}} x dx.$

Soluţie. Cu substituţia $\sin^2 x = z$ suntem conduşi la relaţia $J = 2B\Big(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{4}\Big)$ şi procedând ca la calculul integralei precedente, găsim $J = \dfrac{3\pi\sqrt{2}}{16}$. ■

Exercițiul 2.6.3 *Să se studieze integrala* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx,$ *unde* $p > 0$ *şi* $q > 0$.

Soluţie. Efectuând schimbarea de variabilă $\sin^2 x = z$, obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p}{2}-1}(1-z)^{\frac{q}{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}B\Big(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{p}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\dfrac{q}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{p+q}{2}\Big)}.$$

În particular, pentru $q = 1$, obţinem formula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{p}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{p+1}{2}\Big)}.$$

■

Capitolul 3

Integrale curbilinii

3.1 Drum, drum rectificabil, curbă

Fie xOy un reper cartezian în plan, $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$ versorii acestuia şi cercul de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.1}$$

Un punct $M(x, y)$ aparţinând acestui cerc poate fi considerat ca imaginea unui punct t prin funcţia vectorială de argument real

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} \tag{3.2}$$

definită pe intervalul compact $[0,\, 2\pi] \subset I\!R$ cu valori în $I\!R^2$, unde

$$\begin{cases} \varphi(t) = \cos t, \\ \psi(t) = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0,\, 2\pi]. \tag{3.3}$$

În această situaţie spunem că aplicaţia vectorială $\mathbf{r} : [0,\, 2\pi] \to I\!R^2$ ale cărei valori se determină după legea (3.2), unde funcţiile φ şi ψ sunt date în (3.3), realizează o *reprezentare parametrică* a cercului (3.1), iar argumentul t se numeşte *parametrul* acestei reprezentări.

Acest exemplu simplu sugerează introducerea de reprezentări parametrice şi pentru alte mulţimi de puncte din plan.

Definiţia 3.1.1 *Fie un interval compact* $[a, b] \subset I\!R$. *Se numeşte* **drum în plan** *o funcţie vectorială de variabilă reală, continuă,* $\mathbf{r} : [a, b] \to I\!R^2$.

Punctele A şi B de vectori de poziţie $\mathbf{r}(a)$ *şi* $\mathbf{r}(b)$ *se numesc* **capetele** *sau* **extremităţile drumului**. **Imaginea drumului** (d) *este submulţimea* $I(d) \subset I\!R^2$ *a tuturor punctelor* $M(x,y)$ *ale căror vectori de poziţie sunt valori ale funcţiei* $\mathbf{r}$, *adică*

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t), \;\; t \in [a,b].$$

Dacă notăm cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct $M(x,y) \in I(d)$, atunci

$$(d): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.4}$$

unde:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}; \qquad \mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j}. \tag{3.5}$$

Din ecuaţia (3.4) şi notaţiile (3.5), obţinem

$$(d): \; \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b]. \tag{3.6}$$

Definiţia 3.1.2 *Când t parcurge intervalul* $[a,b]$ *se spune că* (3.6) *constituie o* **reprezentare parametrică** *a imaginii drumului* $I(d)$ *şi a drumului* (d), *iar t se numeşte* **parametru**. *Relaţia* (3.4) *se numeşte* **ecuaţia vectorială** *a imaginii* $I(d)$ *sau a drumului* (d).

Definiţia 3.1.3 *Drumul* (d) *se numeşte* **închis** *dacă extremităţile sale coincid; dacă există* $t_1,\, t_2 \in [a,b]$, *cu* $t_1 \neq t_2$, *astfel încât* $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, *spunem că punctul* $M_1 \in I(d)$ *(sau* $M_2 \in I(d)$*) de vector de poziţie*

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{r}(t_1) \;\; (\text{sau} \quad \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{r}(t_2))$$

este **punct multiplu** *al drumului. Un drum fără puncte multiple se numeşte* **simplu**.

Definiţia 3.1.4 *Drumul* (d) *se numeşte* **neted** *dacă*

$$\varphi, \psi \in C^1\big([a,b]\big), \quad \Big(\frac{d\varphi}{dt}(t)\Big)^2 + \Big(\frac{d\psi}{dt}(t)\Big)^2 > 0, \quad t \in [a,b].$$

Deoarece membrul întâi a inegalităţii din Definiţia 3.1.4 este pătratul mărimii (normei) vectorului $\mathbf{r}'(t)$, definiţia poate fi reformulată în limbaj vectorial.

Definiţia 3.1.5 *Drumul* (d) *se numeşte* **neted** *dacă funcţiia vectorială* $\mathbf{r} \in C^1\big([a,b]\big)$ *şi peste tot în compactul* $[a,b]$ *este satisfăcută inegalitatea*

$$\Big\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\Big\| = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0.$$

Definiţia 3.1.6 *Drumurile* (d_1) *şi* (d_2) *definite de funcţiile vectoriale de variabilă reală* $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to I\!R^2$ *şi* $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to I\!R^2$ *se numesc* **juxtapozabile** *dacă* $b_1 = a_2$ *şi* $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$. *În acest caz funcţia*

$$\mathbf{r} : [a_1,\, b_2] \to I\!R^2, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{dacă} \quad t \in [a_1,\, b_1], \\ \mathbf{r}_2(t), & \text{dacă} \quad t \in [a_2,\, b_2] \end{cases}$$

defineşte un nou drum numit **juxtapunerea** *drumurilor* (d_1) *şi* (d_2) *şi este notat prin* $(d_1 \cup d_2)$.

Definiţia 3.1.7 *Un drum* (d) *se numeşte* **neted pe porţiuni** *dacă se poate obţine prin juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.*

Fie (d) drumul parametrizat în plan definit de (3.4) şi $\Delta \subset [a,b]$ mulţimea de puncte

$$\Delta = \{t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n\}. \tag{3.7}$$

Definiţia 3.1.8 *Mulţimea* Δ *se numeşte* **diviziune a intervalului** $[a,b]$ *dacă*

$$a = t_0 \,<\, t_1 \,<\, \cdots \,<\, t_{n-1} \,<\, t_n = b.$$

Totalitatea diviziunilor intervalului $[a,b]$ va fi notată cu $\mathcal{D}([a,b])$.

Definiţia 3.1.9 **Norma diviziunii** Δ *este numărul pozitiv*

$$\nu(\Delta) = \|\Delta\| = \max\{t_1 - t_0,\, t_2 - t_1,\, \cdots,\, t_n - t_{n-1}\}.$$

Definiţia 3.1.10 *Punctele*

$$\begin{gathered} A(\varphi(a), \psi(a)) = A_0(\varphi(a), \psi(a)),\;\; A_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)), \ldots, \\ A_{n-1}(\varphi(t_{n-1}), \psi(t_{n-1})),\;\; B(\varphi(b), \psi(b)) = A_n(\varphi(b), \psi(b)) \end{gathered} \tag{3.8}$$

se spune că determină **linia poligonală** *cu* **vârfurile** *în imaginea drumului.*

Definiţia 3.1.11 *Prin* **lungimea** *drumului* Δ *se înţelege numărul nenegativ* ℓ_Δ *dat de*

$$\begin{aligned}\ell_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \| \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \| = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\Big)^2 + \Big(\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\Big)^2}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Definiţia 3.1.12 *Fie* Δ *şi* Δ' *două diviziuni ale intervalului* $[a, b]$. *Spunem că diviziunea* Δ' *este* **mai fină** *decât diviziunea* Δ, *şi scriem aceasta* $\Delta \subset \Delta'$, *dacă elementele mulţimii* Δ *din* (3.7) *sunt şi elemente ale mulţimii* Δ'.

Observaţia 3.1.1 *Dacă diviziunea* Δ' *este mai fină decât diviziunea* Δ, *atunci între normele acestora are loc inegalitatea* $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$.

Fie $\mathcal{L} = \{\ell_\Delta \;:\; \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\} \subset I\!R_+^*$.

Definiţia 3.1.13 *Drumul* (d) *se numeşte* **rectificabil** *dacă mulţimea* $\mathcal{L}$ *este mărginită superior. Marginea superioara a mulţimii* $\mathcal{L}$, *dacă există, se numeşte* **lungimea** *drumului* (d) *şi se notează cu* $\ell(d)$. *Deci,*

$$\ell(d) = \sup \mathcal{L}.$$

Teorema 3.1.1 *Fie* (d) *un drum neted din* $I\!R^2$ *a cărui imagine* $I(d)$ *are reprezentarea parametrică* (3.6). *Atunci,* (d) *este rectificabil şi*

$$\begin{aligned}\ell(d) = \int_a^b \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt = \\ = \int_a^b \Big\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\Big\|\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Demonstraţie. Fie Δ diviziunea (3.7) şi linia poligonală corespunzătoare (3.8) cu lungimea sa dată de (3.9). Deoarece φ şi ψ sunt derivabile, aplicând teorema creşterilor finite a lui Lagrange, există

$$\alpha_i,\, \beta_i \,\in\, (t_i,\, t_{i+1}),\;\, i \,\in \{0,\, 1,\, \cdots,\, n-1\}$$

astfel încât

$$\ell_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi'(\alpha_i)\Big)^2 + \Big(\psi'(\beta_i)\Big)^2}(t_{i+1} - t_i). \tag{3.11}$$

În membrul al doilea al egalităţii (3.11) adunăm şi scădem termenul

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}(t_{i+1}-t_i).$$

În felul acesta (3.11) devine

$$\ell_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}(t_{i+1}-t_i)+$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sqrt{\Big(\varphi'(\alpha_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\beta_i)\Big)^2}-\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}\Big)(t_{i+1}-t_i). \tag{3.12}$$

A doua sumă din membrul doi al egalităţii (3.12) poate fi făcută oricât de mică pentru Δ suficient de fină. Într-adevăr, funcţia

$$h:[a,b]\times[a,b]\to I\!R,\quad h(x,y)=\sqrt{((\varphi'(x))^2+(\psi'(y))^2},\tag{3.13}$$

fiind continuă pe mulţimea compactă $[a,b]\times[a,b]$, este uniform continuă şi deci $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât oricare ar fi punctele (x_1,y_1) şi (x_2,y_2) din intervalul bidimensional $[a,b]\times[a,b]$ cu

$$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon),\ |y_1-y_2|<\delta(\varepsilon)\tag{3.14}$$

are loc inegalitatea

$$|h(x_1,\,y_1)-h(x_2,\,y_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.\tag{3.15}$$

Considerând că $(x_1,y_1)=(\alpha_i,\beta_i)$ şi $(x_2,y_2)=(\tau_i,\tau_i)$ şi alegând diviziunea Δ astfel încât

$$\|\Delta\|<\delta(\varepsilon),\tag{3.16}$$

din (3.14) şi (3.15) rezultă

$$-\frac{\varepsilon}{b-a}<h(\alpha_i,\,\beta_i)-h(\tau_i,\,\tau_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}.\tag{3.17}$$

Prin sumarea după i de la 0 până la $n-1$ în extremitatea dreaptă a inegalităţilor (3.17), obţinem

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sqrt{\Big(\varphi'(\alpha_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\beta_i)\Big)^2}-\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}\Big)(t_{i+1}-t_i)<\varepsilon.\tag{3.18}$$

Prima sumă din (3.12) este o sumă Riemann corespunzătoare funcţiei integrabile (3.13), diviziunii Δ cu proprietatea (3.16) şi punctelor intermediare

$$\tau_i \in [t_i,\, t_{i+1}],\;\; i = \overline{0, n-1}.$$

Fie subşirul de numere naturale $(k_n)_{n\geq 0}$ şi

$$\Delta_n = \{t_0^n = a, t_1^n, \cdots, t_{k_{n-1}}^n, t_{k_n}^n = b\}$$

un şir de diviziuni cu proprietatea că şirul normelor este convergent la zero, adică

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0. \tag{3.19}$$

Făcând în (3.12) pe $n \to \infty$, al doilea termen din membrul doi tinde la zero în baza lui (3.18) şi (3.19), iar primul termen are ca limită integrala Riemann

$$\int_a^b \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt = \int_a^b \Big\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\Big\|\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt. \tag{3.20}$$

Din acest rezultat deducem că şirul (ℓ_{Δ_n}), corespunzător şirului de diviziuni (Δ_n), are limită finită şi aceasta este integrala din (3.20), deci drumul (d) este rectificabil şi are loc (3.10). ■

Definiţia 3.1.14 *Drumurile (d_1) şi (d_2) definite de funcţiile vectoriale de variabilă reală $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to I\!R^2$ şi $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to I\!R^2$ se numesc* **echivalente** *dacă există o funcţie $\alpha : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ continuă, strict crescătoare şi surjectivă, astfel încât*

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\alpha(t)), \quad (\forall)\, t \in [a_1, b_1]. \tag{3.21}$$

Observaţia 3.1.2 *Dacă drumul (d_1) este echivalent cu drumul (d_2), atunci (d_2) este echivalent cu (d_1), aplicaţia din Definiţia* 3.1.14 *fiind funcţia inversă α^{-1}.*

Observaţia 3.1.3 *Dacă (d_1) este echivalent cu (d_2), atunci $I(d_1) = I(d_2)$, adică imaginea drumului este invariantă la relaţia de echivalenţă a drumurilor în plan. De asemenea, noţiunile de drum simplu şi de drum închis sunt invariante la această relaţie.*

Propoziţia de mai jos va demonstra că noţiunea de drum rectificabil şi lungimea unui drum sunt invariante la relaţia de echivalenţă în mulţimea drumurilor în plan.

Propoziţia 3.1.1 *Dacă drumurile în plan* (d_1) *şi* (d_2) *definite de funcţiile vectoriale de variabilă reală* $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to I\!R^2$ *şi* $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to I\!R^2$ *sunt echivalente, iar* (d_1) *este rectificabil, atunci* (d_2) *este rectificabil şi* $\ell(d_1) = \ell(d_2)$.

Demonstraţie. Să considerăm că cele două funcţii care definesc respectiv cele două drumuri sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \varphi_1(t)\mathbf{i} + \psi_1(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a_1,\, b_1]; \\ \mathbf{r}_2(\tau) &= \varphi_2(\tau)\mathbf{i} + \psi_2(\tau)\mathbf{j}, \quad \tau \in [a_2,\, b_2]. \end{aligned}$$

Fie $\alpha : [a_1,\, b_1] \to [a_2,\, b_2]$ funcţia continuă, strict crescătoare şi surjectivă cu proprietatea (3.21). Dacă $\Delta' \in \mathcal{D}([a_2, b_2])$,

$$\Delta' = \{a_2 = \tau_0,\, \tau_1,\, \cdots,\, \tau_{n-1},\, \tau_n = b_2\}, \quad \tau_i < \tau_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{3.22}$$

atunci există o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a_1,\, b_1])$,

$$\Delta = \{a_2 = t_0,\, t_1,\, \cdots,\, \cdots,\, t_{n-1},\, t_n = b_2\}, \quad t_i < t_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{3.23}$$

astfel încât

$$\alpha(t_i) = \tau_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Reciproc, dacă $\Delta \in \mathcal{D}([a_1,\, b_1])$ de forma (3.23), atunci imaginile prin funcţia α ale punctelor lui $\Delta \in \mathcal{D}([a_2,\, b_2])$ de forma (3.22). Ţinând cont de (3.21) şi de cele deduse mai sus, avem

$$\begin{aligned} \ell_\Delta &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi_1(t_{i+1}) - \varphi_1(t_i)\Big)^2 + \Big(\psi_1(t_{i+1}) - \psi_1(t_i)\Big)^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi_2(\tau_{i+1}) - \varphi_2(\tau_i)\Big)^2 + \Big(\psi_2(\tau_{i+1}) - \psi_2(\tau_i)\Big)^2} = \ell_{\Delta'}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Din (3.24) rezultă că

$$\{\ell_\Delta \mid \Delta \in \mathcal{D}([a_1,\, b_1])\} = \{\ell_{\Delta'} \mid \Delta' \in \mathcal{D}([a_2,\, b_2])\}. \tag{3.25}$$

Prin ipoteză (d_1) este drum rectificabil ceea ce înseamnă că mulţimea din membrul stâng al egalităţii (3.25) este mărginită superior. Va rezulta că şi mulţimea din membrul al doilea al egalităţii (3.25) este mărginită superior, adică (d_2) este rectificabilă. În plus, marginile lor superioare lor coincid, deci $\ell(d_1) = \ell(d_2)$. ■

Observaţia 3.1.4 *Relaţia de echivalenţă în mulţimea drumurilor din plan este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Rezultă că această relaţie împarte mulţimea drumurilor în clase de echivalenţă. Vom spune că două drumuri aparţin aceleiaşi clase dacă şi numai dacă sunt echivalente.*

Definiţia 3.1.15 *Se numeşte* **curbă plană** *o clasă de drumuri în plan echivalente.*

Observaţia 3.1.5 *Deoarece următoarele noţiuni: drum simplu; drum închis; imaginea unui drum; drum neted; drum neted pe porţiuni; drum rectificabil şi lungimea unui drum sunt invariante la relaţia de echivalenţă, pentru curbele în plan vom introduce corespunzător noţiunile:* **curbă simplă** *sau* **arc simplu de curbă***;* **curbă închisă***;* **imaginea unei curbe***;* **curbă netedă** *sau* **curbă regulată***;* **curbă netedă pe porţiuni***;* **curbă rectificabilă** *şi* **lungimea unei curbe** *sau* **lungimea unui arc de curbă rectificabilă***.*

De exemplu,

Definiţia 3.1.16 *Se numeşte* **imaginea curbei** *imaginea unui drum din clasa de echivalenţă care defineşte curba respectivă.*

Definiţia dată este corectă deoarece toate drumurile dintr–o clasă au aceeaşi imagine. În cele ce urmează o curbă se va nota fie prin C fie specificându–i extremităţile imaginii sale în cazul când nu este închisă, adică (AB).

Definiţia 3.1.17 *Prin* **ecuaţia vectorială a unei curbe în plan** *şi* **ecuaţii parametrice ale unei curbe în plan** *înţelegem ecuaţia vectorială respectiv ecuaţii parametrice ale oricărui drum din clasa de echivalenţă care defineşte curba.*

Definiţia 3.1.18 *Curbele C_1 şi C_2 se numesc* **juxtapozabile**, *dacă există drumurile $(d_1) \in C_1$ şi $(d_2) \in C_2$ cu (d_1) şi (d_2) juxtapozabile. În acest caz, clasa de echivalenţă a drumului $(d_1 \cup d_2)$ se numeşte* **juxtapusa** *curbelor C_1 şi C_2 şi se notează cu $(C_1 \cup C_2)$. Curba C se numeşte* **netedă pe porţiuni** *dacă este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede.*

În cele ce urmează, identificând drumurile echivalente între ele, vom folosi termenul de *imaginea curbei* în aceeaşi accepţiune ca termenul *imaginea drumului.* Noţiunea de *drum* sau cea de *curbă* va fi desemnată de cel mai multe ori printr–o reprezentare parametrică. În loc de *imaginea curbei* vom spune tot *curbă* dacă acest lucru nu creează confuzii.

Observaţia 3.1.6 *Toate consideraţiile de mai sus se transpun fără dificultate pentru* **curbe în spaţiul tridimensional** *sau* **curbe în spaţiu** *cu modificările impuse de apariţia celei de a treia coordonate. Spre exemplu, dacă*

$$(d): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [a,b], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

este reprezentarea parametrică a drumului neted (d) în spaţiu, lungimea sa va fi

$$\ell(d) = \int_a^b \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2}\, dt = \int_a^b \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big\|\, dt,$$

unde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ este ecuaţia vectorială a drumului, $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}$, iar $\mathbf{k}$ este cel de al treilea versor al reperului cartezian $Oxyz$ din $I\!R^3$.

Observaţia 3.1.7 *O curbă admite o infinitate de reprezentări parametrice.*

În continuare vom pune în evidenţă o parametrizare importantă a curbelor rectificabile şi anume *parametrizarea naturală.*

În acest sens fie $t \in [a,b]$ oarecare căruia îi corespunde punctul M pe imaginea curbei netede sau netede pe porţiuni C din spaţiu. Presupunem că extremităţile A şi B sunt corespunzătoare respectiv valorilor $t = a$ şi $t = b$ şi fie $\mathbf{r}(\tau)$ vectorul de poziţie al unui punct curent P de pe imaginea curbei astfel încât P să se găsească între A şi M. Aceasta înseamnă că $\tau \in [a,t]$. Putem vorbi de lungimea arcului de curbă (AM) pe care o notăm cu s şi care este o

funcţie $s : [a, b] \to [0, L]$, unde L este lungimea curbei considerate. Valorile funcţiei $s = s(t)$ sunt date de

$$s(t) = \int_a^t \Big\|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau)\Big\| d\tau = \int_a^t \sqrt{\Big(\varphi'(\tau)\Big)^2 + \Big(\psi'(\tau)\Big)^2 + \Big(\chi'(\tau)\Big)^2}\, d\tau \qquad (3.26)$$

şi $s'(t) = \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2 + \Big(\chi'(t)\Big)^2}$, de unde deducem că funcţia s este diferenţiabilă, iar diferenţiala sa, numită şi *element de arc al curbei*, este

$$ds = \Big\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\Big\| dt = \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2 + \Big(\chi'(t)\Big)^2}\, dt. \qquad (3.27)$$

Se observă de asemeni că

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \|d\mathbf{r}\|. \qquad (3.28)$$

Deoarece $s'(t) > 0$, rezultă că funcţia $s = s(t)$ este strict crescătoare. Fiind injectivă, funcţia $s = s(t)$ este inversabilă.

Să notăm $\beta = \beta(s)$ inversa funcţiei s.

Atunci, funcţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\beta(s)) \qquad (3.29)$$

caracterizează un drum din aceeaşi clasă care defineşte curba. Astfel, am introdus o nouă parametrizare a curbei care se numeşte *parametrizarea naturală*.

Dacă $\mathbf{r}(\beta(s)) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}$, atunci *ecuaţiile parametrice naturale* ale unei curbe în spaţiu C, rectificabilă şi de lungime L, sunt

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s), \end{cases} \qquad s \in [0,\, L]. \qquad (3.30)$$

Dacă arcul de curbă rectificabil C este în planul xOy, atunci are ecuaţiile parametrice naturale

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \end{cases} \qquad s \in [0,\, L], \qquad (3.31)$$

iar elementul de arc al său este dat de

$$ds = \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \|d\mathbf{r}\|. \qquad (3.32)$$

Din expresiile (3.27), (3.28) şi (3.32) rezultă $\left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right\| = 1$, ceea ce arată că vectorul

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \quad \text{sau} \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{3.33}$$

al cărui reprezentant în punctul P al curbei are direcţia şi sensul tangentei în P la curbă, este un versor care se numeşte *versorul tangentei* la curbă în punctul P al curbei corespunzător valorii s a parametrului natural.

Exemplul 3.1.1 *Să se determine elementul de arc şi lungimea curbei plane*

$$C: \begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}, \\ y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}}, \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Soluţie. După un calcul simplu găsim $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sin t}$ şi $\psi'(t) = \dfrac{1}{\cos t}$. Atunci, elementul de arc este

$$ds = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}}\, dt = \frac{dt}{\sin t \cos t} = \frac{2dt}{\sin 2t}.$$

Lungimea L a curbei C este

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2dt}{\sin 2t} = \ln \operatorname{tg} t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln 3.$$

■

3.2 Definiţia integralei curbilinii de primul tip

Fie (AB) o curbă plană netedă sau netedă pe porţiuni şi $f(M)$ o funcţie definită pe un domeniu D din planul xOy care include imaginea curbei.

Considerăm o partiţie Δ a curbei în subarcele (părţile) $(A_{i-1}A_i)$, $i = \overline{1,n}$, prin intermediul punctelor de diviziune

$$A = A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_{n-1},\ A_n = B$$

şi alegem un punct arbitrar M_i pe fiecare din arcele $(A_{i-1}A_i)$. Cu aceste date formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i, \tag{3.34}$$

unde Δs_i este lungimea arcului $(A_{i-1}A_i)$, numită *sumă integrală* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ şi alegerii $M_i \in (A_{i-1}A_i)$ a *punctelor intermediare.*

Definiţia 3.2.1 *Funcţia f se numeşte* **integrabilă în raport cu arcul pe curba** (AB) *dacă sumele integrale* (3.34) *admit limita finită I când cel mai mare dintre Δs_i tinde la zero şi această limită nu depinde de alegerea punctelor intermediare $M_i \in (A_{i-1}A_i)$.*

Definiţia 3.2.2 *Dacă funcţia f este integrabilă în raport cu arcul pe curba* (AB), *limita I a sumelor integrale* (3.34) *când cel mai mare dintre Δs_i tinde la zero se numeşte* **integrala curbilinie de primul tip** *a funcţiei $f(M)$ pe curba (AB) şi se notează cu simbolul*

$$I = \int_{(AB)} f(M)ds. \tag{3.35}$$

Punctele curbei (AB) fiind determinate de coordonatele (x, y) în reperul cartezian Oxy, valoarea $f(M)$ a funcţiei f în punctul $M \in (AB)$ se poate nota prin $f(x, y)$, astfel că integrala curbilinie de prima speţă (3.35) se poate scrie în forma echivalentă

$$I = \int_{(AB)} f(x, y)ds.$$

Variabilele x şi y nu sunt independente; punctul $M(x, y)$ aparţinând curbei (AB), coordonatele sale x şi y trebuie să satisfacă ecuaţia curbei.

Putem arăta că integrala curbilinie de primul tip sau *integrala curbilinie de prima speţă* nu diferă în mod esenţial de cea a integralei definite dintr–o funcţie de o variabilă independentă şi, mai mult, vom arăta că o integrală curbilinie de primul tip se reduce la o integrală definită. În acest sens să considerăm parametrizarea naturală a curbei (AB) cu originea de arc în A şi având lungimea L. Această parametrizare naturală este dată de (3.31). Restricţia funcţiei arbitrare $f(x, y)$ în punctele arcului (AB) este o funcţie compusă de o singură variabilă, şi anume

$$f\Big(x(s), y(s)\Big), \quad s \in [0, L].$$

Fie ${s_i}^*$ valoarea parametrului s corespunzătoare punctului M_i, adică ${s_i}^*$ este lungimea arcului (AM_i). Suma integrală (3.34) se poate scrie acum în forma

$$\sum_{i=1}^{n} f\Big(x({s_i}^*),\, y({s_i}^*)\Big)\Delta s_i, \tag{3.36}$$

unde $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, valoarea lui s_0 fiind zero deoarece considerăm că punctul A este originea de arc pe curbă. Constatăm că (3.36) este o sumă integrală corespunzătoare integralei definite $\int_0^L f\Big(x(s),\, y(s)\Big)ds$. Sumele integrale (3.34) şi (3.36) fiind egale, integralele definite legate de acestea sunt egale, prin urmare

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_0^L f\Big(x(s),\, y(s)\Big)ds \tag{3.37}$$

ambele integrale existând sau neexistând simultan. În consecinţă, dacă funcţia $f(M)$ este continuă sau continuă pe porţiuni şi mărginită de–a lungul curbei netede sau netedă pe porţiuni (AB), integrala curbilinie de primul tip (3.35) există deoarece integrala definită (Riemann) din membrul doi al relaţiei (3.37) există.

Observaţia 3.2.1 *Deşi integrala curbilinie de prima speţă se reduce direct la o integrală definită există o distincţie netă între cele două noţiuni. Conţinutul acestei distincţii constă în aceea că lungimile* Δs_i *ale arcelor* $(A_{i-1}A_i)$ *sunt pozitive indiferent care din extremităţile* A *sau* B *a fost aleasă ca origine. Deci, orientarea curbei* (AB)*, adică alegerea unui anumit sens de parcurs pe curbă începând de la origine către cealaltă extremitate, nu afectează valoarea integralei* (3.35) *şi, în consecinţă, avem*

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

După cum se ştie, integrala definită pe compactul $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$ *dintr–o funcţie de variabila* $x \in [a,\, b]$ *schimbă de semn când limitele de integrare se schimbă între ele.*

Când reducem o integrală curbilinie de primul tip la o integrală definită corespunzătoare putem folosi la fel de bine orice parametru al curbei în locul lungimii de arc s. Presupunem aşadar că o curbă netedă (AB) este dată prin ecuaţiile paramaetrice

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b, \tag{3.38}$$

unde funcţiile φ şi ψ sunt astfel încât $\varphi, \psi \in C^1\Big([a,b]\Big)$ şi $\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2 > 0$. În aceste condiţii, putem introduce ca parametru pe curbă lungimea de arc s măsurată de la punctul A al curbei corespunzător lui $t = a$ şi astfel arcul s creşte odată cu parametrul t, aceasta însemnând că s este o funcţie strict crescătoare de $t \in [a,b]$.

Pornind de la *formula de calcul* (3.37), efectuând în integrala definită din membrul al doilea al acestei formule schimbarea de variabilă

$$t \mapsto s = s(t),\;\; t \in [a,b],\;\; s(t) \in [0,L] \tag{3.39}$$

şi având în vedere notaţiile $x(s(t)) = \varphi(t)$, $y(s(t)) = \psi(t)$, obţinem

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_0^L f\Big(x(s),\, y(s)\Big)ds =$$

$$= \int_a^b f\Big(\varphi(t),\, \psi(t)\Big)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt.$$

În acest mod am demonstrat

Teorema 3.2.1 *Dacă* (AB) *este o curba netedă din domeniul* $D \subset I\!R^2$, *de ecuaţii parametrice* (3.38), *şi* $f : D \to I\!R$ *o funcţie reală de două variabile reale continuă în punctele* $M(x,y)$ *ale curbei, atunci are loc egalitatea*

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_a^b f\Big(\varphi(t),\, \psi(t)\Big)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt \tag{3.40}$$

ori de câte ori integralele care intră în ea există; integrala curbilinie din membrul stâng există dacă şi numai dacă integrala definită din membrul al doilea există.

Când curba (AB) este reprezentată prin ecuaţia carteziană explicită

$$y = y(x),\;\; a \le x \le b,$$

se poate lua ca parametru pe curbă abscisa x şi formula (3.40) devine

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_a^b f\Big(x,\, y(x)\Big)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{3.41}$$

Un *reper polar* în plan este ansamblul format de un punct O, numit *pol*, şi o semidreaptă cu originea în pol, de direcţie definită de versorul $\mathbf{i}$, numită

axă polară. *Raza vectoare* a unui punct M din plan este vectorul cu originea în pol şi extremitatea în M, iar *unghiul polar* al puctului M este unghiul dintre versorul $\mathbf{i}$ şi raza vectoare a acelui punct. Perechile (r, θ) se numesc *coordonate polare* în plan. Dacă polul reperului polar coincide cu originea reperului cartezian Oxy, iar axa sa polară este axa absciselor, legătura dintre coordonatele carteziene şi cele polare ale unui punct este

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad r \in [0, +\infty), \;\; \theta \in [0, 2\pi).$$

Să presupunem că arcul de curbă (AB) este reprezentat în coordonate polare prin ecuaţia polară explicită

$$r = r(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \tag{3.42}$$

unde r este *mărimea razei vectoare* iar θ este *unghiul polar* măsurat în radiani şi cuprins între 0 şi 2π. În ipoteza că cele două repere sunt legate precum am menţionat, putem scrie o reprezentare parametrică a arcului de curbă (AB) în care parametrul pe curbă să fie unghiul polar

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{3.43}$$

Pentru calculul integralei curbilinii de primul tip în plan când curba (AB) este dată de (3.43) vom folosi (3.40) în care în locul lui t avem acum θ, iar funcţiile φ şi ψ sunt cele din membrii doi ai relaţiilor (3.43). Calculând radicalul care apare în egalitatea (3.40) se găseşte

$$\sqrt{\Big(\varphi'(\theta)\Big)^2 + \Big(\psi'(\theta)\Big)^2} = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}.$$

Rezultă că în cazul când arcul de curbă plană netedă (AB) este reprezentat în coordonate polare, formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip este

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f\Big(r(\theta)\cos\theta,\, r(\theta)\sin\theta\Big)\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta. \tag{3.44}$$

Integrala definită a unei funcţii nenegative f pe compactul $[a, b]$ are ca interpretare geometrică aria trapezului curbiliniu limitat de dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox şi graficul arcului de curbă (AB) de ecuaţie $y = f(x)$.

Observaţia 3.2.2 *Plecând de la interpretarea geometrică dată integralei definite, putem afirma că integrala curbilinie de primul tip a unei funcţii pozitive $f(x,y)$ pe arcul (AB) este aria porţiunii din suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curba directoare arcul (AB), porţiune limitată de arcul (AB) şi de mulţimea de puncte de coordonate $(x,y,f(x,y))$, unde $M(x,y)\in(AB)$.*

Observaţia 3.2.3 *Definiţia şi formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip pe o curbă plană se transpun direct la cazul când funcţia $f(M)$ este definită în punctele $M(x,y,z)$ unui arc (AB) al curbei în spaţiu sau curbei strâmbe reprezentat parametric prin*

$$(AB):\begin{cases} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), \qquad a\le t\le b,\\ z=\chi(t),\end{cases} \tag{3.45}$$

integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei $f(M)$ de–a lungul curbei (AB) se reduce la o integrala definită

$$\int_{(AB)} f(M)ds=\int_a^b f\Big(\varphi(t),\,\psi(t),\,\chi(t)\Big)\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \tag{3.46}$$

Observaţia 3.2.4 *Rezultatele stabilite rămân adevărate când curba C este netedă pe porţiuni, iar funcţia de integrat este continuă şi mărginită pe fiecare porţiune netedă a curbei. În această situaţie, integrala curbilinie de primul tip este suma integralelor curbilinii de speţa întâi pe porţiunile netede care prin juxtapunere dau curba C.*

Exerciţiul 3.2.1 *Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip*

$$I=\int_C (x^2+y^2)\,\ln z\,ds$$

unde curba C pe care se efectuează integrarea funcţiei $f(x,y,z)=(x^2+y^2)\ln z$ este reprezentată parametric de

$$C:\begin{cases} x &= e^t\cos t,\\ y &= e^t\sin t, \qquad t\in[0,1].\\ z &= e^t,\end{cases}$$

Soluţie. Vom aplica formula de calcul (3.46). Pentru aceasta trebuie calculate derivatele funcţiilor care definesc curba şi apoi radicalul sumei pătratelor acestor derivate. Găsim

$$\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} = e^t\sqrt{3}.$$

Conform formulei de calcul (3.46), avem

$$I = \sqrt{3}\int_0^1 t\, e^{3t}\, dt.$$

Integrala definită la care s–a redus integrala curbilinie dată se calculează aplicând metoda integrării prin părţi şi se găseşte

$$I = \frac{1 + 2\, e^3}{3\sqrt{3}}.$$

După prezentarea aplicaţiilor integralelor curbilinii în mecanică, rezultatul găsit poate fi interpretat. Mai precis, valoarea integralei este momentul de inerţie faţă de axa Oz al unui fir material care are configuraţia curbei (C) şi a cărui densitate în fiecare punct $M(x, y, z)$ al curbei este $\ln z$. ■

3.3 Proprietăţile integralelor curbilinii

Proprietăţile integralelor curbilinii de primul tip sunt analoage celor ale integralelor definite şi sunt implicate direct de către acestea din urmă prin formulele de calcul (3.37) şi (3.46) care dau legăturile integralelor curbilinii de primul tip în plan şi respectiv în spaţiu cu integrale definite.

1. (*liniaritatea*). Dacă funcţiile $f(M)$ şi $g(M)$ sunt integrabile de–a lungul curbei (AB) şi λ şi μ sunt constante reale arbitrare, atunci funcţia $(\lambda\, f + \mu\, g)(M)$ este integrabilă pe (AB) şi are loc egalitatea

$$\int_{(AB)} (\lambda\, f + \mu\, g)(M) ds = \lambda \int_{(AB)} f(M) ds + \mu \int_{(AB)} g(M) ds.$$

2. (*monotonia*). Dacă $f(M)$ este o funcţie nenegativă integrabilă pe curba (AB), atunci

$$\int_{(AB)} f(M) ds \geq 0.$$

3. (*aditivitatea*). Dacă arcul (AB) este juxtapunerea a două arce netede sau netede pe porţiuni (AC) şi (CB), egalitatea

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(AC)} f(M)ds + \int_{(CB)} f(M)ds$$

are loc când integralele care apar există; integrala din membrul stâng există dacă şi numai dacă ambele integrale din membrul drept există.

4. (*evaluarea modulului integralei curbilinii*). Dacă $f(M)$ este integrabilă pe (AB), atunci funcţia $|f|(M) = |f(M)|$ este de asemenea integrabilă pe (AB) şi

$$\Big| \int_{(AB)} f(M)ds \Big| \leq \int_{(AB)} |f(M)|\, ds.$$

5. (*teorema valorii medii*). Dacă $f(M)$ este funcţie continuă pe o curbă netedă sau netedă pe porţiuni de lungime L, atunci există un punct $M^* \in (AB)$ astfel încât

$$\int_{(AB)} f(M)ds = f(M^*)\, L.$$

6. (*independenţa integralei curbilinii de primul tip de orientarea arcului de curbă pe care se integrează*). Alegerea sensului de parcurs pe arcul de curbă neted sau neted pe porţiuni (AB) nu influenţează valoarea integralei curbilinii de primul tip pe (AB), în sensul că

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds,$$

fapt ce a fost menţionat şi în paragraful precedent.

3.4 Aplicaţii ale integralelor curbilinii de primul tip

Vom pune în evidenţă unele probleme tipice ale căror rezolvări naturale implică integralele curbilinii de primul tip.

3.4.1 Masa şi centrul de greutate ale unui fir material

Definiţia 3.4.1 *Se numeşte* **fir material** *ansamblul dintre o curbă netedă sau netedă pe porţiuni* (AB) *şi o funcţie pozitivă şi continuă* ρ *definită în punctele curbei. Curba* (AB) *se numeşte* **configuraţia firului material**, *iar funcţia* ρ *se numeşte* **densitatea firului material**, *valoarea acesteia în punctul* $M \in (AB)$ *numindu–se* **densitatea de materie** *sau* **densitatea materială** *în punctul* M. *Firul material se numeşte* **omogen** *sau* **neomogen** *după cum densitatea este funcţia constantă sau nu.*

Este posibil să precizăm densitatea materială întrun punct fie prin $\rho(x, y)$, dacă curba (AB) se află în planul Oxy, fie prin $\rho(x, y, z)$ dacă (AB) este o curbă în spaţiu.

Densitatea materială în punctul $M \in (AB)$ este limita raportului dintre masa Δm a arcului de curbă (MM') şi lungimea Δs a acestuia când M' tinde la M pe curbă.

Împărţim arcul (AB) în n subarce cu ajutorul diviziunii Δ formată de punctele de diviziune $\Delta = \{A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n = B\})$ şi pe fiecare arc $(A_{i-1}A_i)$, $i = \overline{1, n}$, luăm un punct M_i în care densitatea are valoarea $\rho(M_i)$. Dacă

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1} = \ell(AA_i) - \ell(AA_{i-1}),\ \ i = \overline{1, n}$$

reprezintă lungimea arcului $(A_{i-1}A_i)$, atunci masa firului material de configuraţie $(A_{i-1}A_i)$ poate fi aproximată prin $\rho(M_i)\,\Delta s_i$.

În acest mod, firul material continuu de configuraţie arcul (AB) şi densitate $\rho(M)$ se poate înlocui cu n puncte materiale izolate, situate pe arc,

$$M_1, M_2, \ldots, M_n,$$

având masele

$$\rho(M_1)\,\Delta s_1,\quad \rho(M_2)\,\Delta s_2,\quad \cdots,\quad \rho(M_n)\,\Delta s_n.$$

Presupunând că punctele M_i au coordonatele $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, rezultă că suma

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\,\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

este o valoare aproximativă a masei firului material (AB) care corespunde diviziunii Δ a arcului (AB) şi alegerii arbitrare a punctelor $M_i \in (A_{i-1}A_i)$.

Dacă considerăm un şir de diviziuni (Δ_n) ale arcului (AB) cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$$

şi presupunem densitatea de materie funcţie continuă pe arcul (AB), atunci

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\, \Delta s_i$$

există şi reprezintă masa firului material cu configuraţia curba netedă sau netedă pe porţiuni (AB). Ţinând seama de definiţia integralei curbilinii de primul tip avem că masa totală $\mathcal{M}$ a firului material considerat este

$$\mathcal{M} = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\, \Delta s_i = \int_{(AB)} \rho(M) ds = \int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds.$$

În cazul în care arcul de curbă se află în planul Oxy, masa firului material de configuraţie (AB) şi densitate $\rho(x, y)$ în punctul $M(x, y) \in (AB)$ este

$$\mathcal{M} = \int_{(AB)} \rho(M) ds = \int_{(AB)} \rho(x, y) ds.$$

Observaţia 3.4.1 *Când firul material este omogen, cu densitatea constantă ρ_0, masa firului material corespunzător este* $\mathcal{M} = \rho_0 \int_{(AB)} ds.$

Pe de altă parte, când firul este omogen, $\mathcal{M} = \rho_0\, L$, unde $L = \ell(AB)$ este lungimea firului. De aici deducem că lungimea unui arc de curbă netedă sau netedă pe porţiuni se poate prezenta ca integrala curbilinie de primul tip

$$\ell(AB) = \int_{(AB)} ds = \int_a^b \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big\| \, dt.$$

Din statică, se ştie că date n puncte materiale

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \cdots, M_n(x_n, y_n, z_n),$$

de mase corespunzătoare $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$, coordonatele centrului de greutate G al sistemului format de cele n puncte materiale sunt:

$$x_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Să considerăm din nou firul material (AB) căruia îi aplicăm o divizare prin punctele $A = A_0,\ A_1, \cdots,\ A_n = B$. Atunci, firul se poate înlocui cu un sistem de n puncte materiale $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, cu ponderile $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$, unde $i = \overline{1, n}$. Ponderea reprezintă masa firului material omogen $(A_{i-1}A_i)$ a cărui densitate este valoarea funcţiei $\rho(x, y, z)$ în punctul $M_i^*(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ales arbitrar pe arcul $(A_{i-1}A_i)$. Coordonatele centrului de greutate pentru acest sistem de puncte materiale vor fi

$$\bar{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}; \qquad \bar{y}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i};$$

$$\bar{z}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}.$$

În aceleaşi ipoteze asupra arcului (AB) şi asupra densităţii de materie pe care le-am întâlnit la determinarea masei firului material, avem:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} x\,\rho(x, y, z)ds; \\ \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} y\,\rho(x, y, z)ds; \\ \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} z\,\rho(x, y, z)ds; \end{cases}$$

Astfel, coordonatele centrului de greutate al firului material neomogen (AB) sunt:

$$x_G = \frac{\int_{(AB)} x\,\rho(x, y, z)ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z)ds}; \qquad y_G = \frac{\int_{(AB)} y\,\rho(x, y, z)ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z)ds};$$

$$z_G = \frac{\int_{(AB)} z\,\rho(x, y, z)ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z)ds}.$$

Dacă firul material este omogen, atunci coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_{(AB)} x\,ds; \qquad y_G = \frac{1}{L}\int_{(AB)} y\,ds; \qquad z_G = \frac{1}{L}\int_{(AB)} z\,ds,$$

unde $L = \displaystyle\int_{(AB)} ds$ este lungimea arcului de curbă (AB).

În cazul în care arcul de curbă se află în planul Oxy, centru de greutate G va avea coordonatele:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} x\,\rho(x,y,z)ds}{\displaystyle\int_{(AB)} \rho(x,y,z)ds}; \qquad y_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} y\,\rho(x,y,z)ds}{\displaystyle\int_{(AB)} \rho(x,y,z)ds},$$

iar dacă firul este omogen coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} x\,ds}{L}; \qquad y_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} y\,ds}{L}. \tag{3.47}$$

Ultima relaţie din (3.47) se scrie în forma

$$y_G\,L = \int_{(AB)} y\,ds$$

sau în forma

$$2\,\pi\,y_G\,L = 2\,\pi\int_{(AB)} y\,ds. \tag{3.48}$$

Dacă avem în vedere că expresia ariei S a suprafeţei de rotaţie generate prin rotirea arcului

$$(AB)\ :\ y = y(x),\ x \in [a,\,b],$$

în jurul axei Ox este

$$S = 2\,\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \ = \ \int_{(AB)} y\,ds,$$

putem scrie relaţia (3.48) în forma

$$2\,\pi\,y_G\,L = S.$$

În felul acesta rezultă *prima teoremă a lui Guldin.*

Teorema 3.4.1 *Dacă se roteşte un arc rectificabil plan (AB) în jurul unei drepte (D) din plan care nu intersectează arcul, aria suprafeţei obţinute este egală cu produsul dintre lungimea arcului (AB) şi lungimea cercului descris prin rotaţia în jurul dreptei (D) de centrul de greutate al arcului (AB).*

Exerciţiul 3.4.1 *Să se calculeze masa şi centrul de greutate ale firului material omogen cu densitatea constantă egală cu unitatea şi configuraţia imaginea curbei*

$$C:\ \begin{cases} x &= \sqrt{\pi^2-t^2}\,\cos t, \\ y &= \sqrt{\pi^2-t^2}\,\sin t, \qquad\qquad t\in[-\pi,\pi]. \\ z &= \sqrt{4\pi^2-1}\sqrt{\pi^2-t^2}, \end{cases}$$

Soluţie. Analizând datele problemei constatăm că integralele curbilinii de primul tip care definesc masa $\mathcal{M}$ şi coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_g există şi avem

$$\mathcal{M}=\int_C \rho(x,y,z)ds=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2+t^2}{\sqrt{\pi^2-t^2}}dt;$$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_C x\,ds=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt; \\ y_G=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_C y\,ds=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt; \\ z_G=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_C z\,ds=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\int_{-\pi}^{\pi}\chi(t)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt. \end{cases}$$

Înlocuind funcţiile care definesc reprezentarea parametrică a curbei C, găsim

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\cos t\,dt; \\ y_G &= \dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\sin t\,dt; \\ z_G &= \dfrac{\sqrt{4\pi^2-1}}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\,dt. \end{cases}$$

Integrala care dă valoarea masei este una improprie, convergentă în baza criteriului de comparaţie în α. Mai mult, pentru că funcţia de integrat este pară, putem scrie

$$\mathcal{M} = 2\int_0^{\pi} \frac{\pi^2 + t^2}{\sqrt{\pi^2 - t^2}}.dt$$

Această integrală devine o integrală definită dacă se efectuează schimbarea de variabilă $t = \pi\cos\tau$. Obţinem

$$\mathcal{M} = 2\pi^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2\tau)\, d\tau = \frac{3\pi^3}{2}.$$

Cota centrului de greutate se determină simplu, ordonata este zero pentru că funcţia de integrat din expresia sa este impară şi intervalul de integrare este simetric faţă de origine, iar abscisa centrului de greutate se determină uşor dacă în integrala care dă expresia acestuia se integrează de două ori prin părţi. Se găseşte:

$$x_G = -\frac{8}{3\pi^2};\ y_G = 0;\ z_G = \frac{16}{9}\sqrt{4\pi^2 - 1},$$

remarcând totodată că centrul de greutate G se află în planul Oxz. ■

3.4.2 Momente de inerţie ale unui fir material

Definiţia 3.4.2 *Se numeşte* **moment de inerţie** *faţă de un element geometric al spaţiului al unui punct material $M_0(x_0, y_o, z_0)$, de masă m_0, produsul dintre masa m_0 şi pătratul distanţei de la punctul M_0 la elementul respectiv.*

Elementul geometric poate fi o dreaptă, un plan sau un punct şi, de cele mai multe ori, acestea sunt legate de elementele reperului cartezian $Oxyz$. Vom avea deci *momente de inerţie axiale* când se aleg ca drepte axele de coordonate ale reperului, *momente de inerţie planare* când planele alese sunt planele de coordonate şi *moment de inerţie central* când se alege ca punct al spaţiului originea reperului.

Definiţia 3.4.3 *Se numeşte* **moment de inerţie** *faţă de un punct P (o dreaptă (D) sau un plan (Π)) al unui sistem de n puncte materiale*

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \cdots,\ M_n(x_n, y_n, z_n),$$

având masele m_1, m_2, $\cdots$, m_n, suma tuturor momentelor de inerţie corespunzătoare fiecărui punct faţă de punctul P (dreapta (D) sau planul (Π)).

Din definiţiile de mai sus rezultă că momentul de inerţie al sistemului de puncte considerat faţă de originea axelor $O(0,\,0,\,0)$ este

$$I_O = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)\, m_k.$$

Momentele de inerţie al aceluiaşi sistem de puncte faţă de axele Ox, Oy, Oz sunt

$$I_{Ox} = \sum_{k=1}^{n}(y_k^2+z_k^2)m_k, \quad I_{Oy} = \sum_{k=1}^{n}(z_k^2+y_k^2)m_k, \quad I_{Oz} = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2+y_k^2)m_k,$$

în timp ce momentele de inerţie ale sistemului de puncte în discuţie faţă de planele de coordonate Oxy, Oyz, Oxz au expresiile

$$I_{Oxy} = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 m_k; \quad I_{Oyz} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 m_k; \quad I_{Oxz} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 m_k.$$

Firul material din spaţiu, cu configuraţia (AB) şi densitatea materială $\rho(x,y,z)$, poate fi înlocuit cu sistemul de puncte materiale M_k având masele

$$m_k = \rho(M_k)\Delta s_k, \quad k = 1,\,2,\,\cdots,\,n.$$

Raţionând ca la determinarea masei firului material deducem că momentele de inerţie ale firului material faţă de originea, axele şi planele reperului de coordonate $Oxyz$ sunt respectiv

$$I_O = \int_{(AB)} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds,$$

$$I_{Ox} = \int_{(AB)} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds, \quad I_{Oy} = \int_{(AB)} (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)ds,$$

$$I_{Oz} = \int_{(AB)} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds,$$

$$I_{Oxy} = \int_{(AB)} z^2\rho(x,y,z)ds; \quad I_{Oyz} = \int_{(AB)} x^2\rho(x,y,z)ds,$$

$$I_{Oxz} = \int_{(AB)} y^2\rho(x,y,z)ds.$$

Dacă firul material se află în planul Oxy, vom putea vorbi doar de momentele de inerţie axiale:

$$I_{Ox} \;=\; \int_{(AB)} y^2\rho(x,y)ds, \qquad I_{Oy} \;=\; \int_{(AB)} x^2\rho(x,y)ds$$

şi de momentul de inerţie central

$$I_O \;=\; \int_{(AB)} (x^2+y^2)\rho(x,y)ds.$$

Definiţia 3.4.4 *Mărimea infinitezimală $dm = \rho(M)ds$ se numeşte* **element de masă filiformă**.

Observaţia 3.4.2 *Formulele care dau masa, coordonatele centrului de greutate şi momentele de inerţie ale unui fir material se pot scrie astfel încât să se pună în evidenţă elementul de masă filiformă.*

Observaţia 3.4.3 *Formulele care dau coordonatele centrului de greutate ale unui fir material în plan şi în spaţiu se pot scrie întruna singură*

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\mathcal{M}}\int_{(AB)} \mathbf{r}\, dm,$$

unde $\mathbf{r}_G$ este vectorul de poziţie al centrului de greutate, iar $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct care descrie configuraţia firului material.

Exemplul 3.4.1 Să *se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz a firului material neomogen având configuraţia curbei*

$$C: \;\; x = t\cos t,\;\; y = t\sin t,\;\; z = t, \quad t\in[0,1]$$

şi densitatea în fiecare punct egală cu cota acelui punct.

Soluţie. Rezultă că densitatea este $\rho(x,y,z) = z$. Pentru calculul momentului de inerţie I_{Oz} trebuie să calculăm integrala curbilinie de primul tip

$$I_{Oz} = \int_C (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)ds = \int_C (x^2+y^2)\,z\,ds.$$

Avem $\varphi(t) = t\cos t$, $\psi(t) = t\sin t$ şi $\chi(t) = t$. Calculând elementul de arc găsim $ds = \sqrt{2+t^2}\,dt$. Atunci, momentul de inerţie cerut este

$$I_{Oz} = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Făcând substituţia $\sqrt{2+t^2} = u$, obţinem

$$I_{Oz} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u^2(u^2-2)\,du = \Big(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3}\Big)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

■

3.5 Definiţia integralei curbilinii de al doilea tip

Pentru o funcţie reală f definită şi mărginită pe un interval compact $[a,b]$ s–a introdus integrala Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$. Vom vedea în continuare cum extinderea integralei definite conduce la *integrala curbilinie de al doilea tip* sau *integrala curbilinie în raport cu coordonatele*. Compactul $[a,b]$ din integrala definită se va înlocui acum cu o curbă netedă sau netedă pe porţiuni, iar în locul funcţiei f va apare o funcţie vectorială de argument vectorial definită pe un domeniu din planul xOy sau din spaţiu care conţine curba. Introducerea acestui tip de integrală a fost sugerată de probleme întâlnite în practică cum ar fi lucrul mecanic al unui câmp de forţe de–a lungul unei curbe sau circulaţia unui fluid pe o curbă.

3.5.1 Lucrul mecanic al unui câmp de forţe

Vom introduce integrala curbilinie de al doilea tip pornind de la o problemă practică, din fizică.

Să considerăm două puncte A şi B ale spaţiului, de vectori de poziţie $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}.$$

Aceste puncte, de coordonate $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, definesc vectorul $\overrightarrow{AB}$ a cărui expresie analitică în reperul $Oxyz$ este

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \;=\; (x_2-x_1)\,\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\,\mathbf{k}.$$

Considerăm de asemeni un vector constant $\mathbf{F}$ de coordonate P, Q, R,

$$\mathbf{F} \;=\; P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k},$$

care din punct de vedere fizic poate fi interpretat ca o forţă care acţionează în fiecare punct $M(x, y, z)$ al segmentului de dreaptă AB.

Lucrul mecanic $\mathcal{L}$ efectuat de forţa constantă $\mathbf{F}$ care acţionează asupra unui punct material pentru a–l deplasa din punctul A în punctul B pe segmentul de dreaptă AB este produsul dintre mărimea forţei, lungimea segmentului AB şi cosinusul unghiului θ dintre vectorii $\mathbf{F}$ şi $\overrightarrow{AB}$

$$\mathcal{L} = \|\mathbf{F}\| \cdot \| \overrightarrow{AB} \| \cdot \cos\theta.$$

Dar expresia din membrul al doilea este produsul scalar al vectorilor $\mathbf{F}$ şi $\overrightarrow{AB}$

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

şi având în vedere că produsul scalar a doi vectori este suma produselor coordonatelor de acelaşi nume, rezultă că lucrul mecanic $\mathcal{L}$ este

$$\mathcal{L} = (x_2 - x_1)\, P + (y_2 - y_1)\, Q + (z_2 - z_1)\, R.$$

Să găsim acum expresia lucrului mecanic în cazul general când forţa $\mathbf{F}$ este variabilă ca direcţie, mărime şi sens, iar traiectoria mişcării punctului $M(x, y, z)$ este o curbă.

Considerăm în acest sens curba netedă C de ecuaţii parametrice

$$C : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \tag{3.49}$$

sau de ecuaţie vectorial ă

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b], \tag{3.50}$$

unde $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}$, şi o forţă

$$\mathbf{F} : D \subset I\!R^3 \to I\!R^3, \quad \mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k} \tag{3.51}$$

ale cărei componente P, Q, R sunt funcţii reale de variabilele reale x, y, z definite pe un domeniu $D \subset I\!R^3$ care conţine imaginea curbei C şi care sunt funcţii continue în punctele imaginii curbei C.

Pentru a defini integrala curbilinie de al doilea tip introducem noţiunea de *curbă orientată*. Fie în acest sens $M\big(\varphi(t),\, \psi(t),\, \chi(t)\big)$, sau $M(\mathbf{r}(t))$, punctul de pe imaginea curbei C corespunzător lui $t \in [a, b]$ prin (3.49), respectiv (3.50). Când t parcurge în mod continuu intervalul $[a, b]$ de la a la b, punctul corespunzător parcurge imaginea $I(C)$ a curbei C întrun sens pe care–l numim *sens direct*. Dacă valorii $t = a$ îi corespunde punctul A de pe imaginea curbei C, iar lui $t = b$ îi corespunde punctul $B \in I(C)$, atunci sensul direct este de la A către B, adică este sensul imprimat de creşterea parametrului t. Când t parcurge intervalul $[a, b]$ de la b către a, punctul corespunzător M parcurge $I(C)$ în *sens indirect* sau *sens negativ*.

Definiţia 3.5.1 *O curbă împreună cu unul din sensurile de parcurgere al imaginii sale se numeşte* **curbă orientată**.

Curba C împreună cu sensul direct de parcurgere a lui $I(C)$ se notează cu C^+. În mod asemănător se defineşte C^-.

Observaţia 3.5.1 *Dacă ţinem seama de faptul că funcţia α din definiţia echivalenţei a două drumuri este continuă şi strict crescătoare, rezultă că sensul de parcurgere a lui $I(C)$ nu depinde de alegerea drumului din clasa de echivalenţă care defineşte curba (C), ceea ce înseamnă că odată ales un sens de parcurs al curbei (C), trecerea la o altă parametrizare a ei nu modifică sensul de parcurs.*

Împărţim arcul de curbă orientată C de extremităţi A şi B în n subarce prin intermediul punctelor

$$A = A_0, \quad A_1, \quad \cdots, \quad A_{n-1}, \quad A_n = B \tag{3.52}$$

şi considerăm linia poligonală cu vârfurile în aceste puncte. Putem considera că forţa $\mathbf{F}$ din (3.51) are o valoare constantă de–a lungul fiecărui segment orientat $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, egală cu $\mathbf{F}(M_i)$, unde M_i este un punct oarecare, dar fixat, de pe arcul de curbă $(A_{i-1}A_i)$. Calculăm acum lucrul mecanic corespunzător mişcării punctului material de–a lungul liniei poligonale, considerând că pe fiecare segment de extremităţi A_{i-1} şi A_i, $i = \overline{1, n}$ acţionează forţa $\mathbf{F}(M_i)$. Dacă $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $A_i(x_i, y_i, z_i)$ şi

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}, \tag{3.53}$$

atunci lucrul mecanic corespunzător mişcării punctului material de–a lungul segmentului orientat cu originea în A_{i-1} şi extremitatea A_i este

$$\Delta\mathcal{L}_i = \mathbf{F}(M_i)\cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i + R(M_i)\,\Delta z_i,$$

iar lucrul mecanic total $\mathcal{L}_\Delta$ corespunzător deplasării de–a lungul liniei poligonale este

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i + R(M_i)\,\Delta z_i. \tag{3.54}$$

Ultima sumă poate fi luată ca expresie aproximativă a lucrului mecanic efectuat de către câmpul de forţe $\mathbf{F}(M)$ de–a lungul curbei (AB). Pentru a obţine valoarea exactă a lucrului mecanic trebuie să trecem la limită în suma (3.54) când lungimea celui mai mare dintre arcele $(A_{i-1}A_i)$ tinde la zero. O astfel de trecere la limită în formă generală conduce la un nou tip de integrală curbilinie.

3.5.2 Definiţia integralei curbilinii de al doilea tip

Fie $C^+ = (AB)$ o curbă netedă sau netedă pe porţiuni de reprezentare parametrică (3.49) şi câmpul vectorial $\mathbf{F}$ din (3.51). Împărţim curba (AB) în n arce cu ajutorul punctelor de diviziune (3.52) şi formăm suma integrală

$$T = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i + R(M_i)\,\Delta z_i, \tag{3.55}$$

unde $M_i(\xi_i,\, \eta_i,\, \zeta_i) \in (A_{i-1}A_i)$, iar Δx_i, Δy_i şi Δz_i sunt date în (3.53).

Definiţia 3.5.2 *Dacă sumele integrale* (3.55) *admit o limită finită I când cea mai mare lungime a arcelor $(A_{i-1}A_i)$ tinde la zero, funcţia vectorială* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *se numeşte* **integrabilă în raport cu coordonatele pe curba** $C = (AB)$, *iar limita I se numeşte* **integrala curbilinie de tipul al doilea** *sau* **integrala curbilinie în raport cu coordonatele** *a funcţiei vectoriale* $\mathbf{F}$ *şi se notează*

$$I = \int_{(AB)} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz \tag{3.56}$$

sau, folosind coordonatele punctului curent M,

$$I = \int_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{3.57}$$

De multe ori integrala curbilinie de al doilea tip se notează fără a mai menţiona coordonatele funcţiilor componente ale câmpului vectorial $\mathbf{F}$, deci

$$I = \int_{(AB)} P\,dx + Qdy + Rdz.$$

Având în vedere că expresia de sub semnul integrală din (3.56) este produsul scalar dintre câmpul vectorial (3.51) şi vectorul $d\,\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$, rezultă că integrala curbilinie de al doilea tip a funcţiei vectoriale $\mathbf{F}(M)$ de–a lungul curbei orientate direct $C^+ = (AB)$ poate fi notată şi în forma

$$I = \int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r}.$$

Observaţia 3.5.2 *Integrala curbilinie de al doilea tip a funcţiei vectoriale de trei variabile reale* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *de–a lungul curbei orientate* C^+ *este suma integralelor curbilinii de tipul al doilea*

$$\int_{C^+} P(M)dx, \quad \int_{C^+} Q(M)dy, \quad \int_{C^+} R(M)dz,$$

corespunzătoare câmpurilor vectoriale

$$(P, 0, 0), \quad (0, Q, 0), \quad (0, 0, R),$$

care sunt proiecţiile funcţiei vectorială $\mathbf{F}$ *pe respectiv versorii* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *şi* $\mathbf{k}$ *ai reperului* $Oxyz$.

Observaţia 3.5.3 *Integrala curbilinie de al doilea tip nu trebuie confundată cu integrala unui câmp vectorial în raport cu una din variabilele sale pe un interval compact din* $\mathbb{R}$ *situat pe axa variabilei.*

Dacă domeniul D de definiţie a funcţiei $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ conţine intervalul $[a, b] \subset Ox$, atunci

$$\int_a^b \mathbf{F}(x, y, z)dx = \mathbf{i}\int_a^b P(x, y, z)dx + \mathbf{j}\int_a^b Q(x, y, z)dx + \mathbf{k}\int_a^b R(x, y, z)dx.$$

Integralele din membrul doi sunt integrale proprii depinzând de doi parametri, iar rezultatul integrării este o funcţie vectorială ce depinde de variabilele y şi z.

3.6 Legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii

Integrala curbilinie de al doilea tip se poate reduce la integrala curbilinie de primul tip, legătura dintre ele fiind descrisă în teorema de mai jos.

Teorema 3.6.1 *Fie $C^+ = (AB)$ curba netedă de ecuaţii parametrice* (3.49) *şi câmpul vectorial* (3.51) *definit şi mărginit pe un domeniu $D \subset I\!\!R^3$ care include curba C şi continuu în punctele curbei. Atunci, avem egalitatea*

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(M) \cdot \boldsymbol{\tau}(M) ds, \tag{3.58}$$

unde $\boldsymbol{\tau}(M)$ este versorul tangentei la curba orientată C^+ în punctul curent $M(x, y, z)$ al curbei, cu condiţia ca integralele curbilinii care apar să existe. Integrala curbilinie din primul membru al egalităţii (3.58) *există dacă şi numai dacă există integrala curbilinie de primul tip din membrul doi.*

Demonstraţie. Să demonstrăm mai întâi egalitatea

$$\int_{C^+} P(M) dx = \int_C P(M) \cos\alpha(M) ds, \tag{3.59}$$

unde $\cos\alpha(M)$ este mărimea algebrică a proiecţiei versorului $\boldsymbol{\tau}(M)$ pe direcţia versorului $\mathbf{i}$ al axei Ox, adica $\cos\alpha(M) = \boldsymbol{\tau}(M) \cdot \mathbf{i}$. Integrala din primul membru al egalităţii (3.59) este, prin definiţie, limita sumelor integrale de forma

$$T = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\, \Delta x_i. \tag{3.60}$$

Să considerăm că originea de arc pe curba C^+ coincide cu extremitatea A corespunzătoare valorii $t = a$ şi să comparăm suma integrală (3.60) cu suma integrală

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} P(M_i) \cos\alpha(M_i) \Delta s_i,$$

unde s_i este lungimea arcului (AA_i), $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, iar $\alpha(M_i)$ este unghiul pe care îl face cu axa Ox tangenta în punctul $M_i \in (A_{i-1}A_i)$ la curba C^+. Să considerăm că parametrizarea curbei (AB) este cea naturală

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \qquad t \in [0,\, L], \\ z = z(s), \end{cases}$$

unde L este lungimea arcului (AB). Versorul $\boldsymbol{\tau}(M)$ este legat de parametrul natural s al curbei C^+, unde s este lungimea arcului (AM), prin relaţia

$$\boldsymbol{\tau}(M) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(M),$$

unde vectorul $\mathbf{r}$ care apare în exprimarea lui $\boldsymbol{\tau}(M)$ este vectorul de poziţie al punctului curent $M(x, y, z)$ al curbei

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte, expresia analitică a oricărui versor se poate scrie în forma

$$\boldsymbol{\tau}(M) = \cos\alpha(M)\,\mathbf{i} + \cos\beta(M)\,\mathbf{j} + \cos\gamma(M)\,\mathbf{k},$$

unde $\beta(M)$ şi $\gamma(M)$ sunt unghiurile dintre versorul tangentei $\boldsymbol{\tau}(M)$ şi axele Oy, respectiv Oz. Atunci,

$$\Delta x_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{dx}{ds}(M)ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \cos\alpha(M)\,ds. \tag{3.61}$$

Aplicând teorema valorii medii în integrala Riemann (3.61), găsim

$$\Delta x_i = \cos\alpha(M_i^*)\,\Delta s_i, \quad M_i^* \in (A_{i-1}A_i).$$

În aceste condiţii, diferenţa dintre sumele T şi T^* este

$$T - T^* = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)[\cos\alpha(M_i^*) - \cos\alpha(M_i)]\,\Delta s_i. \tag{3.62}$$

Luând valoarea absolută în ambii membri ai lui (3.62) şi folosind proprietăţile funcţiei modul, obţinem

$$\Big|T - T^*\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} \Big|P(M_i)\Big| \cdot \Big|\cos\alpha(M_i^*) - \cos\alpha(M_i)\Big|\Delta s_i. \tag{3.63}$$

Funcţia $\cos\alpha(M)$ este continuă deoarece curba C^+ este netedă. Ca mulţime de puncte, curba C^+ este o mulţime mărginită şi închisă, deci este o mulţime compactă în $I\!R^3$. Cum o funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă, deducem că funcţia $\cos\alpha(M)$ este uniform continuă şi prin urmare, dat un $\varepsilon > 0$, inegalitatea

$$\Big|\cos\alpha(M_i^*) - \cos\alpha(M_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{L\,\sup|P|} \tag{3.64}$$

este satisfăcută pentru orice partiţie a curbei $C^+ = (AB)$ a cărei normă (cel mai mare dintre numerele Δs_i) este destul de mică. Din (3.63) şi (3.64) rezultă

$$\Big|T - T^*\Big| < \frac{\varepsilon}{L\,\sup|P|}\,\sup|P|\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = \varepsilon. \tag{3.65}$$

Inegalitatea (3.65) demonstrează că sumele integrale T^* şi T au aceeaşi limită când norma diviziunii $\Delta = \{A_0 = A,\, A_1,\, \cdots,\, A_{n-1},\, A_n = B\}$ tinde la zero şi ca urmare egalitatea (3.59) este demonstrată.

În mod asemănător se demonstrează egalităţile

$$\begin{aligned} &\int_{C^+} Q(M)dy = \int_C Q(M)\cos\beta\, ds,\\ &\int_{C^+} R(M)dy = \int_C R(M)\cos\gamma\, ds. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Sumând membru cu membru egalităţile (3.59) şi (3.66) se obţine (3.58) şi teorema este demonstrată. ■

Observaţia 3.6.1 *Când curba $C^+ = (AB)$ este în planul xOy legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii este*

$$\int_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;\;=\;\; \int_C \Big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha\Big)ds,$$

unde $\alpha = \alpha(M)$ este unghiul dintre direcţia pozitivă a axei Ox şi tangenta la curba (AB) în punctul M al ei.

3.7 Formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip

Teorema care dă formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip şi cea care dă legătura dintre integralele curbilinii de primul şi cel de al doilea tip implică următorul rezultat pe care, din motive de simplitate a scrierii formulelor, îl vom formula pentru cazul în care curba se află în planul Oxy.

Teorema 3.7.1 *Fie $C^+ = (AB)$ o curbă netedă de ecuaţii parametrice*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a,b]$$

şi $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ *o funcţie vectorială de două variabile reale definită întrun domeniu plan* D *care conţine arcul* C. *Atunci, avem următoarea relaţie*

$$\begin{aligned}&\int_{C^+} Pdx + Qdy = \\ &= \int_a^b \Big[P\Big(\varphi(t),\,\psi(t)\Big)\,\varphi'(t) + Q\Big(\varphi(t),\,\psi(t)\Big)\,\psi'(t)\Big]dt,\end{aligned} \tag{3.67}$$

dacă integralele care intră în componenţa ei există. Mai mult, integrala din membrul stâng a lui (3.67) *există dacă integrala definită din membrul al doilea există.*

Teorema de mai sus rămâne adevărată dacă arcul de curbă C^+ este neted pe porţiuni. Ea poate fi uşor transpusă la cazul în care curba (AB) este în spaţiu şi este reprezentată paramatric de ecuaţiile (3.49) iar câmpul vectorial **F** este (3.51). Avem

$$\begin{aligned}&\int_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \int_a^b \Big[P\Big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\Big)\varphi'(t) + Q\Big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\Big)\psi'(t) + \\ &\quad + R\Big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\Big)\chi'(t)\Big]dt.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Formulele de calcul (3.67) şi (3.68) se pot scrie vectorial în forma

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M)\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

cu menţiunea că în cazul integralei curbilinii în planul xOy, mărimile care intervin au expresiile

$$\begin{cases} \mathbf{F}(M) &= P(M)\,\mathbf{i} + Q(M)\,\mathbf{j}, \\ d\mathbf{r} &= dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}(t) &= \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, \\ \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= \mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\,\mathbf{i} + \psi'(t)\,\mathbf{j}, \end{cases}$$

iar în cazul integralei curbilinii în spaţiu, aceleaşi mărimi au semnificaţiile

$$\begin{cases} \mathbf{F}(M) &= P(M)\,\mathbf{i} + Q(M)\,\mathbf{j} + R(M)\,\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}(t) &= \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k} \\ \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= \mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\,\mathbf{i} + \psi'(t)\,\mathbf{j} + \chi'(t)\,\mathbf{k}. \end{cases}$$

Să considerăm unele cazuri particulare importante ale formulei de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea în plan.

Dacă curba $C^+ = (AB)$ din planul xOy este determinată de ecuaţia

$$y = y(x), \;\; x \in [a, b]$$

formula (3.68) devine

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy \;\; = \;\; \int_a^b [P(x,\, y(x)) + Q(x,\, y(x))\, y'(x)]dx.$$

În particular, dacă (AB) este un segment de dreaptă paralelă cu axa Ox, deci de ecuaţie $y = y_0, \;\; x \in [a, b]$, fapt ce implică $y'(x) = 0$, atunci formula de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea este

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, y_0)dx.$$

În mod similar, pentru o curbă plană determinată de ecuaţia

$$x = x(y), \;\; y \in [c,\, d],$$

formula corespunzătoare de calcul a integralei curbilinii este

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy \;\; = \;\; \int_c^d [P(x(y),\, y)\, x'(y) + Q(x(y),\, y)]dy. \tag{3.69}$$

Dacă (AB) este un segment de dreaptă paralel cu axa Oy, descris de ecuaţia

$$x = x_0, \;\; y \in [c,\, d],$$

avem $x'(y) = 0$ şi formula de calcul (3.69) devine

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy \;\; = \;\; \int_c^d Q(x_0, y)dy.$$

Exercițiul 3.7.1 Să *se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în plan*

$$I=\int_C xydx-y^2dy,\ \text{unde } C:\ x=t^2,\ y=t^3,\ t\in[0,1].$$

Soluție. Avem $\varphi(t)=t^2$, $\psi(t)=t^3$ $(0\le t\le 1)$. Funcțiile φ și ψ sunt derivabile și cu derivată continuă și $\varphi'(t)=2t$, $\psi'(t)=3t^2$. Funcțiile P și Q sunt date de $P(x,y)=xy$ și $Q(x,y)=-y^2$, deci sunt continue în tot planul. Putem deci aplica formula de calcul (3.67). Avem:

$$P(\varphi(t),\psi(t))=t^5,\ Q(\varphi(t),\psi(t))=-\,t^6;$$

$$I=\int_0^1(2\,t^6-3\,t^8)\,dt=\Big(\frac{2}{7}t^7-\frac{1}{3}t^9\Big)\Big|_0^1=-\,\frac{1}{21}.$$

■

Exercițiul 3.7.2 *Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în spațiu*

$$I=\int_C z\sqrt{a^2-x^2}dx+xzdy+(x^2+y^2)dz,\ \text{unde}$$

$$C:\ x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\quad t\in[0,\pi/2],\ a>0,\ b>0.$$

Soluție. Funcțiile care definesc reprezentarea parametrică a curbei sunt derivabile și admit derivată continuă pe intervalul de variație al parametrului t. Funcția P este definită și continuă pe porțiunea spațiului în care abscisele punctelor satisfac dubla inegalitate $-a\le x\le a$. Funcțiile Q și R sunt definite și continue pe întreg spațiul. Deoarece avem $-a\le\varphi(t)\le a$ pentru $t\in[0,\pi/2]$, rezultă că imaginea curbei C este conținută în domeniul comun de definiție al funcțiilor P, Q și R, deci integrala dată există. Aplicând formula de calcul (3.68), obținem

$$I=a^2b\int_0^{\pi/2}(t\cos 2t+1)\,dt=\frac{a^2b}{2}(\pi-1).$$

■

3.8 Proprietăţi ale integralelor curbilinii de al doilea tip

Din modul cum a fost definită integrala curbilinie de al doilea tip

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.70}$$

deducem că un factor constant poate fi scos în afara semnului de integrală şi că integrala unei sume de funcţii vectoriale este suma integralelor funcţiilor termeni. Ambele proprietăţi pot fi exprimate prin egalitatea

$$\int_{C^+} \Big(\lambda\, \mathbf{F}(M) + \mu\, \mathbf{G}(M)\Big) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_{C^+} \mathbf{G}(M) \cdot d\mathbf{r}, \tag{3.71}$$

unde λ şi μ sunt constante reale arbitrare, iar $\mathbf{F}$ şi $\mathbf{G}$ sunt câmpuri vectoriale integrabile pe curba C^+ în raport cu coordonatele.

O altă proprietate importantă a integralei curbilinii de al doilea tip (3.70) este dependenţa sa de orientarea curbei, fapt care se exprimă prin egalitatea

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C^-} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.72}$$

a cărei demonstraţie este simplă. Într-adevăr, dacă schimbăm direcţia în care curba $C^+ = (AB)$ este parcursă trebuie să înlocuim cantităţile Δx_i şi Δy_i, care intră în suma integrală (3.55), prin $-\Delta x_i$ şi respectiv $-\Delta y_i$. Această înlocuire schimbă semnul sumelor integrale (3.55) şi, în consecinţă, semnul limitei lor ceea ce conduce la (3.72).

Dependenţă de orientarea curbei a integralei curbilinii de al doilea tip este în concordanţă cu interpretarea fizică a acesteia care reprezintă lucrul mecanic al unui câmp de forţe de–a lungul unei curbe.

Întradevăr, lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe schimbă de semn dacă sensul de parcurs al curbei se schimbă.

3.9 Integrale curbilinii de tipul al doilea pe curbe închise

Pe o curbă simplă închisă C este esenţial să specificăm sensul de parcurs al curbei deoarece, după cum s–a văzut, valoarea integralei curbilinii de al doilea

tip depinde de sensul de parcurs al curbei. Extremităţile unei asemenea curbe fiind identice, în general nu se poate desprinde din context care este sensul de parcurs al curbei. De regulă, sensul pozitiv de parcurs al unei curbe plane închise este sensul invers acelor de ceasornic, iar pentru integrala curbilinie de al doilea tip pe o astfel de curbă se foloseşte un simbol special şi anume cel de integrală prevăzut cu un cerc la mijlocul ei, cerc pe care se figurează o săgeată reprezentând sensul de parcurs al curbei. Când nu se figurează săgeata pe cercul plasat pe semnul integrală, deci când aceasta se notează cu simbolul $\oint$, vom înţelege că integrarea se efectuează pe o curbă închisă parcursă în sens pozitiv.

3.10 Independenţa de drum a integralei curbilinii de al doilea tip

3.10.1 Formularea problemei

Fie D domeniul de definiţie al câmpului vectorial $\mathbf{F}$ şi (AB) un arc de curbă, neted pe porţiuni, inclus în întregime în mulţimea D. Când se studiază integrala curbilinie de al doilea tip în plan sau în spaţiu

$$I = \int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.73}$$

este posibil ca în anumite cazuri valoarea sa fie independentă de forma drumului de integrare şi să fie determinată doar de extremităţile A şi B ale drumului. Cu alte cuvinte numărul real I exprimat prin (3.73) este acelaşi pentru toate căile de integrare care au originea în A şi extremitatea în punctul B.

Definiţia 3.10.1 *Integrala curbilinie în raport cu coordonatele a câmpului vectorial* $\mathbf{F}$ *se numeşte* **independentă de drum** *în domeniul* D *dacă are loc egalitatea*

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r}, \tag{3.74}$$

oricare ar fi curbele netede pe porţiuni γ_1 *şi* γ_2, *incluse în* D, *având origine comună în* A *şi extremitate comună în* B, *punctele* A *şi* B *fiind alese arbitrar în domeniul* D.

Ne propunem să determinăm condiţii care să implice independenţa de drum pe domeniul D a unei integrale curbilinii de tipul al doilea sub forma generală (3.73). Vom vedea că această problemă este legată de determinarea unei funcţii U, diferenţiabile pe domeniul D, a cărei diferenţială să fie egală cu expresia diferenţială de sub semnul integralei din (3.73), adică

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{3.75}$$

Pentru simplitatea scrierii formulelor şi relaţiilor matematice vom considera cazul plan, transpunerea rezultatelor pentru cazul spaţial fiind simplă. În acest caz funcţia vectorială $\mathbf{F}$ are două componente P şi Q, iar integrala din (3.73) se scrie

$$\int_{(AB)} \mathbf{F}(M)\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{3.76}$$

sau, mai simplu,

$$\int_{(AB)} \mathbf{F}(M)\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy. \tag{3.77}$$

3.10.2 Cazul unui domeniu plan simplu conex

Definiţia 3.10.2 *Un domeniu plan D se numeşte* **simplu conex** *dacă orice curbă simplă închisă cu imaginea inclusă în interiorul lui D este frontiera unei submulţimi incluse în întregime în D.*

Teorema 3.10.1 *Dacă funcţiile P şi Q şi derivatele lor parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue pe domeniul simplu conex $D \subset I\!R^2$, atunci următoarele patru condiţii sunt echivalente:*

1. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial $\mathbf{F} = (P,\, Q)$ de–a lungul oricărei curbe închise (C), netedă sau netedă pe porţiuni, inclusă în D este egală cu zero*

$$\int_C Pdx + Qdy = 0;$$

2. *integrala curbilinie de tipul al doilea* (3.76) *este independentă de alegerea căii de integrare de extremităţi A şi B, puncte fixate dar alese arbitrar în D;*

3. *expresia diferenţială*

$$\omega = Pdx + Qdy \tag{3.78}$$

este diferenţiala totală (exactă) a unei funcţii reale de două variabile reale U definită şi diferenţiabilă pe D, adică avem (3.75);

4. *relaţia*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{3.79}$$

are loc în orice punct $M(x,y) \in D$.

Demonstraţie. Vom arăta că prima condiţie implică pe cea de a doua, a doua condiţie implică cea de a treia condiţie, a treia condiţie implică condiţia a patra şi, la sfârşit, condiţia a patra implică prima condiţie. Atunci, echivalenţa celor patru condiţii este stabilită.

Arătăm întâi că **1** $\Longrightarrow$ **2**. Pentru aceasta considerăm două drumuri de integrare situate în domeniul D cu origine comună în A, punct fixat dar arbitrar din D, şi extremitate comună în punctul B, ales de asemenea arbitrar în D. Primul drum îl vom nota cu (ACB), iar cel de al doilea va fi notat cu (AEB). Juxtapunerea acestor drumuri este un drum închis pe care îl vom considera parcurs în sensul de la A către B prin C şi apoi din B către A prin E şi îl vom nota cu $(ACBEA)$. Conform ipotezei, integrala curbilinie luată pe acest contur este egală cu zero şi deci

$$\int_{ACBEA} Pdx + Qdy = 0.$$

Însă, folosind proprietăţile integralei curbilinii de al doilea tip, avem

$$\int_{ACBEA} Pdx + Qdy = \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BEA} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{AEB} Pdx + Qdy$$

şi, în consecinţă,

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{AEB} Pdx + Qdy,$$

ceea ce arată că implicaţia **1** $\Longrightarrow$ **2** este demonstrată. Implicaţia rămâne adevărată şi atunci când cele două căi de integrare au puncte în comun.

Să demonstrăm că **2** $\Longrightarrow$ **3**. Presupunem că integrala curbilinie (3.76) nu depinde de calea de integrare situată în domeniul plan simplu conex D, ci doar de extremităţile A şi B ale acesteia. Atunci, dacă fixăm punctul A, integrala poate fi considerată o funcţie de coordonatele x şi y ale punctului variabil B, aflat oriunde în domeniul D. Dacă notăm această funcţie cu U, atunci valoarea sa $U(x,y)$ în punctul $B(x,y)$ este

$$U(x,y) = \int_{AB} Pdx + Qdy. \tag{3.80}$$

Să arătăm că funcţia $U : D \to I\!R$ ale cărei valori se determină după legea (3.80) este diferenţiabilă şi că are loc (3.75). Pentru a demonstra aceasta este suficient să arătăm că funcţia U din (3.80) este derivabilă parţial în D, iar valorile derivatelor parţiale în punctul B

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$$

sunt egale respectiv cu $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$. Pentru derivabilitatea parţială a funcţiei U trebuie să cercetăm existenţa limitelor:

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(x+t,\, y)-U(x,y)}{t};\quad \lim_{t\to 0}\frac{U(x,\, y+t)-U(x,y)}{t}. \tag{3.81}$$

Cantitatea de la numărătorul primei limite este egală cu integrala expresiei diferenţiale $Pdx{+}Qdy$ de–a lungul unui drum de integrare care leagă punctele $B(x,y)$ şi $B_1(x+t,\, y)$ drum care este paralel cu axa Ox. Folosind formulele de calcul ale integralelor curbilinii de al doilea tip în cazul în care calea de integrare este paralelă cu una din axele de coordonate, găsim:

$$\begin{cases} U(x+t,y)-U(x,y) &= \displaystyle\int_x^{x+t} P(\tau,\, y)\, d\tau; \\ U(x,y+t)-U(x,y) &= \displaystyle\int_y^{y+t} Q(x,\, \tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{3.82}$$

Funcţiile P şi Q fiind continue, ele sunt în acelaşi timp parţial continue şi ca atare integranţii din (3.82) sunt funcţii continue. Rezultă că integralelor din membrul doi a lui (3.82) li se poate aplica teorema valorii medii. Obţinem

$$\begin{cases} U(x+t,y)-U(x,y) &= t\,P(x+\theta_1 t,\, y); \\ U(x,y+t)-U(x,y) &= t\,Q(x,\, y+\theta_2 t). \end{cases} \tag{3.83}$$

Din (3.83) şi continuitatea funcţiilor P şi Q deducem că limitele din (3.81) există, ceea ce atrage că funcţia U este derivabilă parţial pe D şi derivatele parţiale sunt date de

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \tag{3.84}$$

În baza faptului că funcţiile P şi Q sunt continue deducem că derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei U sunt continue pe D. Ori, o funcţie care posedă derivate parţiale continue pe domeniul D este diferenţiabilă pe D. Având în vedere (3.84) rezultă că diferenţiala funcţiei U în punctul $B(x,y)$ este dată de (3.75).

Urmează să arătăm că **3** $\Longrightarrow$ **4**. Dacă expresia diferenţială (3.78) este diferenţiala totală exactă a funcţiei U în punctul $B(x,y)$, atunci din unicitatea expresiei diferenţialei unei funcţii avem (3.84). Din ipotezele acestei părţi a teoremei avem că există derivatele parţiale mixte secunde ale funcţiei U în punctul $B(x,y)$ şi că acestea sunt continue pe domeniul D deoarece continue pe D sunt derivatele parţiale ale funcţiei Q în raport cu x şi ale funcţiei P în raport cu y. Conform criteriului lui Schwarz, derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiei U sunt egale oriunde în D ceea ce atrage că avem (3.79) în orice punct al domeniului D.

Rămâne să mai demonstrăm că **4** $\Longrightarrow$ **1**. Presupunem că egalitatea (3.79) este satisfăcută peste tot în domeniul D şi fie C o curbă închisă, arbitrară, netedă sau netedă pe porţiuni, inclusă în domeniul D. Domeniul D fiind unul conex, submulţimea D_1 a lui $\mathbb{R}^2$ care are ca frontieră curba închisă C este în acelaşi timp submulţime a domeniului D, iar pe această submulţime derivatele faţă de y a lui P şi faţă de x a lui Q sunt definite şi continue. Prin urmare, în baza formulei integrale a lui Green, care o vom demonstra în capitolul următor, integrala curbilinie

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{3.85}$$

poate fi transformată întro integrală dublă prin relaţia

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy. \tag{3.86}$$

În baza ipotezei, exprimată prin egalitatea (3.79), integrala din membrul drept a relaţiei (3.86) este egală cu zero. În consecinţă, integrala curbilinie

(3.85) este egală cu zero pe orice curbă închisă C, netedă sau netedă pe porţiuni, situată în întregime în domeniul D. Cu aceasta teorema enunţată este complet demonstrată. ■

3.10.3 Cazul unui domeniu în spaţiu simplu conex

Rezultatele demonstrate în Teorema 3.10.1 pot fi transpuse şi în cazul spaţial. Pentru aceasta ar trebui mai întâi să definim noţiunea de domeniu tridimensional simplu conex.

Definiţia 3.10.3 *Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte* **simplu conex** *dacă orice suprafaţă S închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, cu imaginea inclusă în interiorul lui D este frontiera unei submulţimi inclusă în întregime în D.*

Dăm mai jos enunţul teoremei similare care transpune în spaţiu rezultatele demonstrate în Teorema 3.10.1.

Teorema 3.10.2 *Dacă funcţiile P, Q şi R şi derivatele lor parţiale:*

$$\frac{\partial R}{\partial y};\quad \frac{\partial Q}{\partial z};\quad \frac{\partial P}{\partial z};\quad \frac{\partial R}{\partial x};\quad \frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial P}{\partial y}$$

sunt definite şi continue pe domeniul tridimensional simplu conex D, atunci următoarele patru condiţii sunt echivalente:

1. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$ de–a lungul oricărei curbe închise (C), netede sau netede pe porţiuni, inclusă în D, este egală cu zero*

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = 0.$$

2. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ este independentă de alegerea căii de integrare de extremităţi A şi B, puncte fixate dar alese arbitrar în D.*

3. *expresia diferenţială*

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

este diferenţiala totală (exactă) a unei funcţii reale de trei variabile reale U definită şi diferenţiabilă pe D, adică avem

$$dU(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

4. relaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) & = & \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) & = & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) \end{cases} \tag{3.87}$$

au loc în orice punct $M(x,y,z) \in D$.

3.10.4 Operatorul rotor

Teorema 3.10.2 sugerează folosirea operatorului diferenţial $\boldsymbol{\nabla}$ a lui Hamilton cu ajutorul căruia unele din concluziile teoremei se vor scrie mai simplu. Deşi acest operator a fost introdus anterior, preferăm să reamintim şi să prezentăm unele chestiuni care au legătură cu subiectul tratat şi anume cu independenţa de drum a integralelor curbilinii.

Definiţia 3.10.4 *Se numeşte* **rotorul câmpului vectorial diferenţiabil**

$$\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} \in C^1(D),$$

vectorul notat cu simbolul $rot\,\mathbf{F}$ *a cărui expresie analitică în baza* $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ *este*

$$rot\,\mathbf{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k}. \tag{3.88}$$

Observaţia 3.10.1 *Expresia rotorului câmpului vectorial* $\mathbf{F}$ *poate fi scrisă convenabil ca determinantul simbolic*

$$rot\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{3.89}$$

unde, în formula de calcul a determinantului după elementele primei linii, înmulţirea uneia din operaţiile $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ *şi* $\dfrac{\partial}{\partial z}$ *cu o funcţie înseamnă derivata parţială a acelei funcţii în raport cu variabila corespunzătoare: de exemplu,* $\dfrac{\partial}{\partial x}\,Q$ *înseamnă derivata în raport cu* x *a funcţiei* Q, *adică* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Observaţia 3.10.2 *Având în vedere că expresia analitică a operatorului vectorial* ∇ *este*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

şi ţinând cont de expresia produsului vectorial a doi vectori, deducem că rotorul unui câmp vectorial $\mathbf{F}$ *este produsul vectorial al operatorului* ∇ *cu vectorul* $\mathbf{F}$. *Prin urmare relaţiile* (3.88) *şi* (3.89) *se scriu în forma*

$$rot\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Definiţia 3.10.5 *Câmpul vectorial* $\mathbf{F} \in C^1(D)$ *se numeşte* **irotaţional** *dacă egalitatea* $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ *are loc în toate punctele lui* D.

Observaţia 3.10.3 *Câmpul vectorial diferenţiabil* $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$ *este irotaţional pe domeniul tridimensional* D *dacă şi numai dacă au loc relaţiile* (3.87).

Folosind rezultatele de mai sus, o parte a Teoremei 3.10.2 se poate reformula.

Teorema 3.10.3 *Integrala curbilinie de tipul al doilea a câmpului vectorial*

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) \in C^1(D)$$

este independentă de drumul de integrare situat în domeniul simplu conex D *dacă şi numai dacă câmpul vectorial* $\mathbf{F}$ *este irotaţional.*

Aşadar, după ce verificăm dacă domeniul pe care este definit câmpul diferenţiabil $\mathbf{F}$ este simplu conex, independenţa de drum pe D a integralei curbilinii în raport cu coordonatele din câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este funcţie de rotorul acestui câmp. Dacă $\mathbf{F}$ este câmp irotaţional şi D este domeniu simplu conex, atunci integrala curbilinie (3.73) este independentă de drum pe D.

3.11 Primitiva unei expresii diferenţiale

În demonstraţia Teoremei 3.10.1 am rezolvat implicit următoarea problemă: dată expresia diferenţială (3.78) să se găsească o funcţie reală diferenţiabilă U, de două variabile reale, a cărui diferenţială totală să coincidă cu expresia (3.78), adică să avem (3.75). Odată găsită o astfel de funcţie U, oricare alta cu aceeaşi proprietate diferă de U printr–o constantă.

Definiţia 3.11.1 *Fie* $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$ *un câmp vectorial definit pe domeniul* $D \subset I\!R^3$ *pentru care există rotorul* $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ *care să fie funcţie continuă. Se numeşte* **primitiva** *expresiei diferenţiale*

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

funcţia reală de trei variabile reale U *definită şi diferenţiabilă pe* D *care are proprietatea*

$$d\,U(x, y, z) = \omega.$$

Observaţia 3.11.1 *Dacă domeniul tridimensional* D *este simplu conex şi câmpul vectorial* $\mathbf{F}$ *este irotaţional, integrala curbilinie din expresia diferenţială* ω *este independentă de drum pe* D, *iar funcţia*

$$U\,:\,D \to I\!R, \quad U(x, y, z) = \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz, \tag{3.90}$$

unde A *este un punct fixat din* D *şi* $B(x, y, z)$ *este punct variabil al lui* D, *este o primitivă a expresiei diferenţiale* ω.

Observaţia 3.11.2 *Fiindcă integrala din* (3.90) *nu depinde de calea de integrare, putem considera că* (AB) *este o linie poligonală paralelă cu axele de coordonate. Considerând că punctele* A *şi* B *au coordonatele* $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$ *şi* $B(x, y, z)$, *linia poligonală* $(ACDB)$ *este paralelă cu axele de coordonate dacă* $C(x,\, y_0,\, z_0)$ *şi* $D(x,\, y,\, z_0)$.

Să calculăm integrala curbilinie din expresia diferenţială ω pe linia poligonală $(ACDB)$. Avem

$$U(x,\, y\, z) = \int_{(AC)} \omega + \int_{(CD)} \omega + \int_{(DB)} \omega. \tag{3.91}$$

Dar pe drumul (AC), $y = y_0$ (constant), $z = z_0$ (constant), deci $d\,y = 0$, $d\,z = 0$ şi

$$\int_{(AC)} \omega = \int_{(AC)} Pdx + Qdy + Rdz \;=\; \int_{x_0}^{x} P(t,\, y_0,\, z_0)\, dt. \tag{3.92}$$

Pe drumul (segmentul de dreaptă) (CD), $x = x$ (constant), $z = z_0$ (constant), deci $d\,x = 0$, $d\,z = 0$ şi

$$\int_{(CD)} \omega = \int_{(CD)} Pdx + Qdy + Rdz \;=\; \int_{y_0}^{y} Q(x,\, t,\, z_0)\, dt.$$

În sfârşit, pe ultima porţiune netedă de drum (DB), $x = x$ (constant), $y = y$ (constant), deci $d\,x = 0$, $d\,y = 0$ şi

$$\int_{(DB)} \omega = \int_{(DB)} Pdx + Qdy + Rdz \;=\; \int_{z_0}^{z} R(x,\,y,\,t)\,dt. \tag{3.93}$$

Folosind (3.92) – (3.93) în (3.91), obţinem că funcţia

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\,y_0,\,z_0)\,dt\;+\;\int_{y_0}^{y} Q(x,\,t,\,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x,\,y,\,t)\,dt \tag{3.94}$$

este o primitivă a expresiei diferenţiale $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ şi anume acea primitivă care se anulează în punctul $A(x_0,\,y_0,\,z_0)$.

Să remarcăm că o formulă analoagă formulei (3.94) se obţine dacă se integrează expresia diferenţială ω pe oricare alte trei muchii paralele cu axele de coordonate ale paralelipipedului cu două din vărfurile opuse $A(x_0,\,y_0,\,z_0)$ şi $B(x,y,z)$. De exemplu, dacă drumul de integrare este $(AEFB)$, unde $E(x_0,\,y,\,z_0)$ şi $F(x_0,\,y,\,z)$, primitiva din (3.94) se scrie în forma unei sume de trei integrale curbilinii pe segmente de drepte

$$U(x,y,z) = \int_{(AE)} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{(EF)} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{(FB)} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}.$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii în spaţiu, găsim că o altă expresie a primitivei expresiei diferenţiale $\omega = \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ este

$$U(x,y,z) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y,t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)dt. \tag{3.95}$$

În cazul plan, două din primitivele expresiei diferenţiale (3.78) sunt:

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\,y_0)\,dt\;+\;\int_{y_0}^{y} Q(x,\,t)\,dt;$$

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\,y)\,dt\;+\;\int_{y_0}^{y} Q(x_0,\,t)\,dt$$

şi se obţin respectiv când integrăm ω pe linia poligonală (ACB) cu $C(x,\,y_0)$ şi pe calea de integrare rezultată din reuniunea segmentelor de dreaptă (AD) şi (DB), unde $D(x_0,\,y)$.

Exerciţiul 3.11.1 *Se dă expresia diferenţială*

$$\omega = \Big(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2+z^2}\Big) z dx \, + \, \frac{z}{xy^2} dy + \Big(\frac{x}{x^2+z^2} \, - \, \frac{1}{xy}\Big) dz$$

definită pe orice domeniu tridimensional D, simplu conex, care nu intersectează planele de coordonate Oyz şi Ozx. Să se arate că expresia de mai sus este o diferenţială totală exactă şi să se determine funcţiile primitive ale sale.

Soluţie. Funcţiile P, Q şi R au valorile

$$P(x,y,z) = \Big(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2+z^2}\Big) z, \quad Q(x,y,z) = \frac{z}{xy^2},$$

$$R(x,y,z) = \frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}$$

şi, după cum se vede, sunt continue şi derivabile pe domeniul simplu conex D. Trebuie să mai verificăm că $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$. Efectuând derivatele parţiale ale funcţiilor coordonate P, Q, R, găsim

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{xy^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2+z^2)^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{z}{x^2 y^2}, \end{aligned}$$

deci câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este irotaţional pe D. Pentru determinarea unei primitive vom lua $A(x_0,\, y_0,\, 0)$ cu $x_0 \cdot y_0 \neq 0$ şi $B(x,y,z)$ şi aplicăm formula (3.95). Avem

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\, y_0,\, 0)\, dt \, + \, \int_{y_0}^{y} Q(x,\, t,\, 0)\, dt + \int_0^z R(x,\, y,\, t)\, dt.$$

Primele două integrale sunt nule pentru că în puncte ale planului xOy funcţiile P şi Q au valori egale cu zero. Calculând cea de a treia integrală, găsim

$$U(x,y,z) = \int_0^z \Big(\frac{x}{x^2+t^2} - \frac{1}{xy}\Big) dt.$$

Rezultă că primitiva expresiei diferenţiale ω care se anulează în punctele domeniului D situate în planul xOy este

$$U(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{z}{x} - \frac{z}{xy},$$

oricare altă primitivă fiind $V(x,y,z) = U(x,y,z) + C$, unde C este o constantă reală arbitrară. ∎

Exerciţiul 3.11.2 *Fie expresia diferenţială*

$$\omega = \Big(\frac{y}{x^2+y^2} + 2\,y\Big)dx + \Big(2\,x - \frac{x}{x^2+y^2}\Big)dy$$

definită întrun domeniu plan simplu conex D care nu conţine originea. Să se arate că ω este diferenţială totală exactă pe D şi să se determine funcţia diferenţiabilă $U : D \to I\!R$ cu proprietatea $d\,U(x,y) = \omega$.

Soluţie. Funcţiile reale de două variabile reale P şi Q au valorile date de:

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + 2\,y; \quad Q(x,y) = 2\,x - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Derivatele parţiale $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ au valorile egale, şi anume

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2,$$

deci integrala curbilinie de tipul al doilea din expresia diferenţială ω nu depinde de drumul de integrare situat în D. Funcţia U a cărei diferenţială este ω şi care se anulează în punctul $A(a,\,b)$ are valorile:

$$U(x,y) = \int_a^x \Big(\frac{b}{x^2+b^2} + 2b\Big)dt + \int_b^y \Big(2x - \frac{x}{x^2+t^2}\Big)dt;$$

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{t}{b}\Big|_{t=a}^{t=x} + 2bt\Big|_{t=a}^{t=x} + 2xt\Big|_{t=b}^{t=y} - \operatorname{arctg}\frac{t}{x}\Big|_{t=b}^{t=y};$$

$$U(x,y) = 2xy + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2ab - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Oricare altă primitivă V a expresiei diferenţiale date este de forma

$$V(x,y) = 2xy + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C,$$

unde C este o constantă reală arbitrară. ∎

Capitolul 4

Integrala dublă

4.1 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^2$

În acest paragraf vom reaminti unele noţiuni de topologie în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^2$. Între punctele acestui spaţiu şi cele ale unui plan în care s–a ales o pereche de axe perpendiculare Ox şi Oy, de versori $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ şi respectiv $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, există o corespondenţă biunivocă.

Definiţia 4.1.1 *Se numeşte* **disc deschis** *cu centrul în* $\mathbf{a} = (a, b)$ *şi rază* $\varepsilon > 0$ *mulţimea*

$$B(\mathbf{a}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\},$$

unde d *este metrica euclidiană pe* $\mathbb{R}^2$ *şi* $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ *este distanţa dintre punctele* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{a}$.

Pentru simplitatea expunerii, discului deschis îi vom spune simplu **disc**.

Definiţia 4.1.2 *Un punct* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ *se numeşte* **punct interior** *al mulţimii* $D \subset \mathbb{R}^2$ *dacă există un* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset D$.

Observaţia 4.1.1 U*n punct interior al mulţimii* D *aparţine acesteia.*

Definiţia 4.1.3 *Submulţimea* $D \subset \mathbb{R}^2$ *se numeşte mulţime* **deschisă** *dacă toate elementele sale sunt puncte interioare.*

Definiţia 4.1.4 *Spunem că mulţimea $D \subset I\!R^2$ este* **mulţime conexă** *dacă oricare două puncte ale lui D pot fi unite printr–un arc de curbă conţinut în întregime în D.*

Definiţia 4.1.5 *O mulţime deschisă şi conexă se numeşte* **domeniu**.

De exemplu, discul cu centrul în origine şi rază 1, adică totalitatea punctelor (x, y) care satisfac inegalitatea $x^2 + y^2 < 1$, este un domeniu, în timp ce mulţimea rezultată din reuniunea a două discuri

$$\{(x,y) \in I\!R^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \quad \cup \quad \{(x,y) \in I\!R^2 \,|\, (x-3)^2 + y^2 < 1\}$$

nu este un domeniu deoarece, deşi este mulţime deschisă, nu este mulţime conexă întru–cât există perechi de puncte ale sale care nu pot fi unite printr–un arc de curbă conţinut în întregime în această mulţime.

Definiţia 4.1.6 *Un punct* $\mathbf{a} \in I\!R^2$ *se numeşte* **punct frontieră** *al mulţimii D dacă orice vecinătate a sa conţine atât puncte ale lui D cât şi puncte care nu aparţin lui D. Totalitatea punctelor frontieră ale unei mulţimi se numeşte* **frontiera** *acelei mulţimi.*

Observaţia 4.1.2 *Un punct frontieră al unei mulţimi D poate să aparţină sau să nu aparţină lui D. În particular, o mulţime deschisă nu conţine nici unul din punctele frontierei sale.*

Definiţia 4.1.7 *O mulţime care îşi conţine toate punctele frontieră se numeşte* **mulţime închisă**.

Observaţia 4.1.3 *Fiecărei mulţimi i se poate ataşa o mulţime închisă, care se numeşte* **închiderea** *acelei mulţimi, care constă din toate punctele mulţimii la care se adaugă punctele sale frontieră.*

În particular, când adăugăm unui domeniu D punctele sale frontieră obţinem o mulţime închisă pe care putem să o numim **domeniu închis** sau **continuu**.

Definiţia 4.1.8 *Punctul* $\mathbf{a} \in I\!R^2$ *se numeşte* **punct limită** *sau* **punct de acumulare** *al mulţimii $D \subset I\!R^2$ dacă există un şir de puncte din D, cu termeni diferiţi de* $\mathbf{a}$, *convergent la* $\mathbf{a}$.

Observaţia 4.1.4 *Un punct limită al unei mulţimi D poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii D.*

Se ştie că o mulţime este închisă dacă şi numai dacă îşi conţine toate punctele de acumulare.

Definiţia 4.1.9 *Mulţimea $D \subset I\!R^2$ se numeşte* **mărginită** *dacă poate fi inclusă întrun disc cu centrul întrun punct oarecare al spaţiului $I\!R^2$ deci, indiferent de $\mathbf{x}_0 \in I\!R^2$, există $r > 0$ astfel încât*

$$D \quad \subset \quad B(\mathbf{x}_0, r).$$

Definiţia 4.1.10 *O mulţime mărginită şi închisă în $I\!R^2$ se numeşte* **mulţime compactă** *în $I\!R^2$.*

Dacă D este o mulţime mărginită în $I\!R^2$, atunci mulţimea tuturor distanţelor $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ între punctele arbitrare $\mathbf{x} \in D$ şi $\mathbf{y} \in D$ este o mulţime de numere reale nenegative mărginită deoarece oricare din aceste distanţe nu poate fi mai mare decât diametrul discului în care este inclusă mulţimea D. Prin urmare, putem vorbi de marginea superioară a acestei mulţimi de numere.

Definiţia 4.1.11 *Se numeşte* **diametrul** *mulţimii mărginită $D \subset I\!R^2$ marginea superioară a mulţimii de numere nenegative $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in D,\ \mathbf{y} \in D\}$.*

Definiţia 4.1.12 *Fie D şi E două mulţimi arbitrare din $I\!R^2$. Se numeşte* **distanţa dintre mulţimile** *D şi E marginea inferioară $d(D, E)$ a mulţimii de numere reale nenegative $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, unde $\mathbf{x} \in D$, iar $\mathbf{y} \in E$.*

Dacă mulţimile D şi E au cel puţin un punct în comun (au intersecţie nevidă), atunci $d(A, B) = 0$. Reciproca acestei afirmaţii nu are loc în general. De exemplu, distanţa între hiperbola echilateră $x \cdot y = 1$ şi axa Ox este zero deşi aceste două mulţimi de puncte nu au nici un punct comun deoarece axa Ox nu intersectează hiperbola, ea fiind însă asimptota hiperbolei. În legătură cu această afirmaţie avem următorul rezultat.

Teorema 4.1.1 (**Separabilitatea mulţimilor închise**) *Dacă mulţimile D şi E sunt compacte şi disjuncte în $I\!R^2$, atunci $d(D, E) > 0$.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, adică $d(D,E) = 0$. Din Definiţia 4.1.12 şi teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi, rezultă că pentru fiecare $n \in I\!N^*$ există punctele $\mathbf{x}_n \in D$ şi $\mathbf{y}_n \in E$ astfel încât

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \;<\; \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Deoarece mulţimea D este mărginită rezultă că şirul de puncte $(\mathbf{x}_n)$ este mărginit şi, după lema lui Cesaro, admite un subşir

$$\mathbf{x}_{k_1},\;\; \mathbf{x}_{k_2},\;\; \cdots,\;\; \mathbf{x}_{k_n},\;\; \cdots$$

convergent la un punct $\mathbf{x}_0$. Corespunzător, şirul de puncte

$$\mathbf{y}_{k_1},\;\; \mathbf{y}_{k_2},\;\; \cdots,\;\; \mathbf{y}_{k_n},\;\; \cdots,$$

subşir al şirului $(\mathbf{y}_n)$, este convergent conform lui (4.1) la acelaşi punct $\mathbf{x}_0$.

Să demonstrăm că punctul $\mathbf{x}_0$ aparţine mulţimii D. Într-adevăr, pot exista două posibilităţi. Ori subşirul $(\mathbf{x}_{k_n})$ conţine o infinitate de puncte distincte, fapt care arată că $\mathbf{x}_0$ este punct limită al mulţimii D, prin urmare $\mathbf{x}_0 \in D$ deoarece D este o mulţime închisă ori, de la un rang înainte, toţi termenii subşirului sunt egali cu $\mathbf{x}_0$, caz în care limita este de asemeni $\mathbf{x}_0$, care din nou aparţine lui D. Limita celui de al doilea subşir este tot $\mathbf{x}_0$ şi aparţine lui E, deoarece şi E este mulţime închisă. Atunci, D şi E au un punct în comun ceea ce contrazice ipoteza teoremei. ■

4.2 Aria figurilor plane

Prin **mulţime poligonală** înţelegem mulţimea constituită dintr–un număr finit de submulţimi ale lui $I\!R^2$ ale căror frontiere sunt linii frânte închise. Noţiunea de **arie a unei mulţimi poligonale** este bine cunoscută din geometria elementară. Aria unei mulţimi poligonale este un număr nenegativ care posedă următoarele proprietăţi:

1. (*monotonie*) Dacă P şi Q sunt două mulţimi poligonale, iar $P \subset Q$, atunci
$$\text{aria } P \leq \text{aria } Q;$$

2. (*aditivitate*) Dacă P_1 şi P_2 sunt două mulţimi poligonale disjuncte şi $P_1 \cup P_2$ este reuniunea acestora, atunci

$$\text{aria } (P_1 \cup P_2) = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2;$$

3. (*invarianţă*) Dacă două mulţimi poligonale P_1 şi P_2 sunt congruente, atunci

$$\text{aria } P_1 = \text{aria } P_2.$$

Să extindem noţiunea de arie, cu păstrarea celor trei proprietăţi, la o clasă mai amplă de mulţimi plane. În acest scop considerăm mulţimea F, o submulţime a mulţimii $I\!R^2$. Vom considera de asemeni toate mulţimile poligonale P incluse în F şi toate mulţimile poligonale Q care includ mulţimea F. Primele mulţimi se vor numi **mulţimi scufundate** în mulţimea F, iar mulţimile din cea de a doua categorie formează ceea ce se numeşte **înfăşurătoarea** mulţimii F. Ariile mulţimilor scufundate în mulţimea F sunt mărginite superior, un majorant fiind aria oricărei mulţimi mărginite care face parte din înfăşurătoarea lui F. Mulţimea de numere reale nenegative care reprezintă ariile mulţimilor scufundate, fiind o mulţime majorată, admite o margine superioară

$$S_* = S_*(F) = \sup\{(\text{aria } P) : P \subset F\},$$

iar mulţimea ariilor mulţimilor care constituie înfăşurătoarea lui F posedă evident minoranţi şi ca atare admite margine inferioară

$$S^* = S^*(F) = \inf\{(\text{aria } Q) : Q \supset F\}.$$

Cantitatea S_* este cunoscută ca *măsura Jordan interioară* a mulţimii F, iar numărul S^* se numeşte *măsura Jordan exterioară* a aceleiaşi mulţimi. Aria oricărei mulţimi scufundate în F nu întrece aria oricărei mulţimi care înfăşoară pe F şi, ca urmare, avem

$$S_* \;\leq\; S^*.$$

Dacă $S_* = S^* = S$, atunci valoarea comună S se numeşte *măsura Jordan* a mulţimii F. În acest caz mulţimea F se zice că este *carabilă* sau *măsurabilă Jordan*.

Astfel, am extins conceptul de arie de la o mulţime poligonală, care este evident o mulţime carabilă, la o mulţime mărginită oarecare din plan. Vom

demonstra că cele trei proprietăţi ale ariilor mulţimilor poligonale se conservă şi pentru ariile mulţimilor oarecare mărginite din plan.

Vom stabili acum o condiţie necesară şi suficientă ca o mulţime mărginită să fie carabilă.

Teorema 4.2.1 *O figură plană mărginită F este carabilă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există două mulţimi poligonale $P \subset F$ şi $Q \supset F$ astfel încât*

$$\textit{aria } Q - \textit{aria } P < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă aceste mulţimi P şi Q există, atunci din (4.2) şi din

$$\text{aria } P \leq S_* \leq S^* \leq \text{aria } Q$$

rezultă

$$0 \leq S^* - S_* < \varepsilon > 0$$

şi fiindcă $\varepsilon > 0$ este ales arbitrar rezultă că $S_* = S^*$.

Reciproc, dacă $S_* = S^*$, atunci după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară şi superioară, pentru orice $\varepsilon > 0$ dat există o mulţime poligonală P, scufundată în F, şi o mulţime Q din înfăşurătoarea lui F, astfel încât

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{aria } P \leq S_*, \quad S^* \leq \text{aria } Q < S^* + \frac{\varepsilon}{2},$$

care implică (4.2), ceea ce completează demonstraţia teoremei. ∎

Mulţimea punctelor care aparţin unei mulţimi poligonale Q care înfăşoară mulţimea F şi nu aparţin mulţimii poligonale P, scufundată în F, este o mulţime poligonală având aria egală cu diferenţa dintre aria lui Q şi aria lui P. Această mulţime de puncte conţine frontiera mulţimii F. În consecinţă, condiţia din Teorema 4.2.1 implică că F este carabilă dacă şi numai dacă frontiera sa poate fi scufundată întro mulţime poligonală cu arie arbitrar de mică.

Cu ajutorul Teoremei 4.2.1 se poate stabili măsurabilitatea Jordan a unor mulţimi diferite de cele poligonale. O astfel de mulţime poate fi discul de rază r. Mulţimile P şi Q pentru disc pot fi mulţimile mărginite de poligoane regulate înscrise şi respectiv circumscrise discului, numărul n al laturilor acestor poligoane fiind suficient de mare. De altfel, acesta este modul în care, în geometria elementară, se obţine formula ariei discului de rază r.

Definiţia 4.2.1 *O mulţime de puncte din* $I\!R^2$ *se numeşte* **mulţime de arie nulă** *dacă ea poate fi scufundată într-o mulţime poligonală de arie arbitrar de mică.*

Observaţia 4.2.1 *O curbă în planul* Oxy *este o mulţime de arie nulă.*

Noţiunea din Definiţia 4.2.1 face ca Teorema 4.2.1 să poată fi reformulată în următoarea formă echivalentă.

Teorema 4.2.2 *Necesar şi suficient pentru ca mulţimea* F *să fie măsurabilă Jordan este ca frontiera sa să fie de arie nulă.*

Bazat pe această teoremă putem prezenta o clasă suficient de vastă de mulţimi carabile la care vom face referire în consideraţiile ulterioare. Pentru aceasta să ne amintim că o curbă plană (C) reprezentată parametric prin ecuaţiile

$$(C)\quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

unde funcţiile $\varphi : [\alpha, \beta] \to I\!R$ şi $\psi : [\alpha, \beta] \to I\!R$ sunt continue, derivabile, cu derivate continuie sau continuie pe porţiuni este o curbă rectificabilă, lungimea L a acesteia fiind dată de integrala definită

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Lema 4.2.1 *Orice curbă plană rectificabilă este o mulţime de arie nulă.*

Demonstraţie. Fie (C) o curbă plană rectificabilă de lungime L. Divizăm curba în n părţi prin $n+1$ puncte astfel încât lungimea fiecărei părţi să fie L/n şi construim un pătrat de latură $2L/n$ cu centrul de simetrie în punctul de diviziune de ordin k, unde k ia toate valorile de la 1 până la $n+1$. Reuniunea acestor pătrate este o mulţime poligonală care înfăşoară curba (C) şi a cărei arie nu întrece suma ariilor pătrateleor construite, prin urmare nu este mai mare decât

$$\frac{4L^2}{n^2}(n+1).$$

Deoarece L este fixat şi n poate lua valori numere naturale oricât de mari dorim, curba (L) poate fi scufundată întro mulţime poligonală de arie extrem de mică şi ca atare aria lui (C) este egală cu zero. ∎

Corolarul 4.2.1 *Orice mulţime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe plane rectificabile este mulţime măsurabilă Jordan.*

Aceasta este clasa de mulţimi care o vom considera în continuare.

Observaţia 4.2.2 *Orice mulţime de puncte din plan, cu frontiera reprezentată ca o reuniune finită de curbe plane definite printr–o ecuaţie carteziană explicită de forma*

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

sau printr–o ecuaţie carteziană explicită de forma

$$x = g(y), \quad c \leq x \leq d,$$

unde funcţiile f şi g sunt funcţii continue, cu derivate continue pe porţiuni, este o mulţime măsurabilă în sens Jordan.

Avem acum pregătite toate condiţiile pentru a arăta că noţiunea de arie a unei mulţimi plane mărginită satisface proprietăţile de monotonie, aditivitate şi invarianţă.

În ce priveşte monotonia aceasta este implicată de însăşi definiţia ariei, demonstraţia sa putând fi uşor efectuată. Să stabilim aditivitatea.

Teorema 4.2.3 *Fie F_1 şi F_2 două figuri măsurabile Jordan având interioarele disjuncte şi fie F reuniunea lor. Atunci, F este carabilă şi*

$$\text{aria } F = \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2. \tag{4.3}$$

Demonstraţie. Măsurabilitatea Jordan a mulţimii F rezultă din Teorema 4.2.2 şi din faptul că frontiera lui F este o mulţime de arie nulă deoarece această frontieră este inclusă în reuniunea frontierelor mulţimilor F_1 şi F_2. Prin urmare, pentru a completa demonstraţia, trebuie să deducem egalitatea (4.3). Pentru aceasta considerăm mulţimile poligonale P_1 şi P_2 scufundate în respectiv mulţimile F_1 şi F_2 şi mulţimile poligonale Q_1 şi Q_2 care înfăşoară F_1 şi F_2 respectiv. Deoarece mulţimile poligonale P_1 şi P_2 nu se intersectează, aria mulţimii poligonale P rezultată din reuniunea acestora este egală cu suma ariilor lor. Reuniunea Q a mulţimilor Q_1 şi Q_2, care pot avea intersecţie nevidă, are arie care nu întrece suma ariilor acestora. Prin urmare, avem:

$$\text{aria } P = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 \leq \text{aria } F \leq \text{aria } Q \leq \text{aria } Q_1 + \text{aria } Q_2;$$

$$\text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 \leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2 \leq \text{aria } Q_1 + \text{aria } Q_2.$$

Deoarece diferenţele (aria Q_1 − aria P_1) şi (aria Q_2 − aria P_2) pot fi făcute arbitrar de mici rezultă că are loc egalitatea (4.3). Astfel aditivitatea este demonstrată. ■

Proprietatea de invarianţă a măsurabilităţii Jordan a unei mulţimi din $\mathbb{R}^2$ este de asemeni evidentă. În plus, remarcăm o altă proprietate a mulţimilor plane mărginite şi măsurabile Jordan.

Teorema 4.2.4 *Intersecţia a două mulţimi din $\mathbb{R}^2$, măsurabile în sensul lui Jordan, este o mulţime carabilă.*

Demonstraţie. Dacă F_1 şi F_2 sunt două mulţimi carabile şi F este intersecţia lor, atunci fiecare punct frontieră este un punct frontieră al cel puţin uneia din frontierele mulţimilor F_1 şi F_2. Afirmaţia teoremei rezultă din Teorema 4.2.2 şi din faptul că aria unei reuniuni de mulţimi de arie nulă este egală cu zero. ■

Noţiunea de arie a fost introdusă în conformitate cu ideea lui Jordan, deşi această introducere are unele dezavantaje. Într-adevăr, după cum s–a arătat, reuniunea a două mulţimi carabile este o mulţime carabilă. Aceasta implică imediat că reuniunea unui număr finit de mulţimi carabile este o mulţime carabilă. Proprietatea însă nu se mai păstrează dacă numărul mulţimilor măsurabile în sens Jordan este infinit. Această situaţie face necesară introducerea unei alte măsuri în care să se păstreze proprietatea de mai sus. O astfel de măsura poate fi *măsura Lebesgue*, pe care nu o vom prezenta aici deoarece în continuare vom considera doar integrabilitatea funcţiilor definite pe mulţimi măsurabile în sens Jordan.

4.3 Definiţia integralei duble

Fie D o mulţime mărginită şi carabilă din planul cartezian raportat la reperul ortogonal xOy şi

$$f : D \to \mathbb{R} \tag{4.4}$$

o funcţie reală de două variabile reale definită şi mărginită pe mulţimea D.

Definiţia 4.3.1 *Se numeşte* **partiţie** *sau* **divizare** *a mulţimii D mulţimea*

$$\Delta = \{D_1, \quad D_2, \quad \cdots, \quad D_n\} \tag{4.5}$$

de submulţimi a lui D cu proprietăţile:

1. *interioarele oricăror două mulţimi distincte sunt disjuncte;*

2. *reuniunea tuturor mulţimilor partiţiei, numite* **elemente**, *în număr de* $n \in I\!N^*$, *este mulţimea* D.

Observaţia 4.3.1 *O partiţie a mulţimii mărginite* $D \subset I\!R^2$, *măsurabilă în sens Jordan, se poate realiza cu ajutorul unor elemente a două familii uniparametrice de curbe plane. De exemplu, aceste curbe plane pot fi unele paralele la axele de coordonate* Ox *şi* Oy.

Deoarece mulţimea D este mărginită rezultă că fiecare din elementele partiţiei Δ este mărginită şi ca atare mulţimea tuturor diametrelor $d(D_i)$ are un cel mai mare element.

Definiţia 4.3.2 *Fie mulţimea mărginită şi carabilă* D *şi* Δ *o partiţie a acesteia. Se numeşte* **norma** *sau* **fineţea** *divizării* Δ *numărul real* $\nu(\Delta)$ *sau* $\|\Delta\|$ *egal cu cel mai mare dintre diametrele elementelor partiţiei.*

Considerăm o partiţie Δ a mulţimii D şi suma de forma

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, S_i, \tag{4.6}$$

unde S_i este aria lui D_i, iar (ξ_i, η_i) este un punct arbitrar aparţinând lui D_i, numit **punct intermediar**.

Definiţia 4.3.3 *Sumele din relaţia* (4.6) *se numesc* **sume integrale** *asociate funcţiei* f *din* (4.4), *modului de divizare* Δ *de forma* (4.5) *al mulţimii* D *şi sistemului de puncte intermediare* $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ *ales arbitrar.*

Definiţia 4.3.4 *O partiţie* $\Delta' = \{D'_1, D'_2, \cdots, D'_n\}$ *a mulţimii* D *se spune că este o* **rafinare** *a divizării* Δ *din* (4.5) *dacă fiecare element* D_i *al partiţiei* Δ *este sau element al partiţiei* Δ' *sau reuniunea câtorva elemente* D'_j *din partiţia* Δ'.

Observaţia 4.3.2 *Există o infinitate de sume integrale căci există o infinitate de moduri de a diviza mulţimea* D *şi în cadrul fiecărei partiţii există o infinitate de posibilităţi de a alege punctele intermediare.*

Introducem următoarea definiţie a limitei sumelor integrale (4.6).

Definiţia 4.3.5 *Numărul real J este* **limita sumelor integrale** (4.6) *când $\|\Delta\| \to 0$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi partiţia Δ a mulţimii D cu*

$$\|\Delta\| \ < \ \delta \tag{4.7}$$

şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ să avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \ - \ J| \ < \ \varepsilon. \tag{4.8}$$

Inegalitatea (4.8) trebuie să fie adevărată pentru toate sumele integrale $\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$ care corespund partiţiei Δ din (4.5) ce satisface condiţia (4.7), indiferent de alegerea punctelor intermediare.

Definiţia 4.3.6 *Funcţia* (4.4) *se numeşte* **integrabilă** *pe D dacă limita sumelor integrale* (4.6) *pentru $\|\Delta\| \to 0$ există şi este finită.*

Definiţia 4.3.7 *Dacă funcţia* (4.4) *este integrabilă pe D, atunci numărul real*

$$J = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, S_i \tag{4.9}$$

se numeşte **integrala dublă a funcţiei f pe mulţimea** *D şi se notează cu unul din simbolurile*

$$J = \iint\limits_D f(x, y) d\omega; \quad J = \iint\limits_D f(x, y) dxdy. \tag{4.10}$$

Funcţia f se numeşte *integrand*, D se numeşte *domeniu de integrare*, iar expresiile $f(x, y)d\omega$ şi $f(x, y)dxdy$ se numesc *elemente de integrare*.

Să găsim condiţii care, impuse funcţiei (4.4), asigură existenţa integralei duble (4.10). Aceste condiţii le vom numi condiţii de integrabilitate.

Pentru a stabili condiţii de integrabilitate introducem *sumele Darboux inferioară şi superioară*. În acest sens notăm prin M_i şi m_i marginea superioară şi respectiv marginea inferioară a valorilor restricţiei funcţiei f la elementul D_i al partiţiei Δ din (4.5).

Definiţia 4.3.8 *Sumele:*

$$\Omega = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, S_i; \quad \omega = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, S_i \tag{4.11}$$

se numesc respectiv **suma Darboux superioară** *şi* **suma Darboux inferioară** *a funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ a mulţimii carabile D.*

Observaţia 4.3.3 *Din modul cum au fost definite sumele Darboux* (4.11) *rezultă că oricare ar fi divizarea* Δ *a mulţimii* D*, avem*

$$\Omega \;\geq\; \omega.$$

Să enumerăm proprietăţile fundamentale ale sumelor Darboux.

1. Pentru orice divizare Δ a mulţimii D şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare, suma integrală corespunzătoare se află cuprinsă între suma Darboux inferioară şi suma Darboux superioară corespunzătoare partiţiei Δ,

$$s_\Delta(f) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\, S_i \;\leq\; S_\Delta(f).$$

2. În procesul de rafinare a divizării mulţimii D, sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc. Aceasta înseamnă că dacă ω şi Ω sunt sumele Darboux corespunzătoare modului de divizare Δ, iar ω' şi Ω' sunt sumele Darboux corespunzătoare partiţiei Δ', atunci

$$\omega \;\leq\; \omega' \;\leq\; \Omega' \;\leq\; \Omega.$$

3. Fie Δ' şi Δ'' două diviziuni arbitrare a mulţimii D şi fie ω', Ω' şi ω'', Ω'', sumele Darboux corespunzătoare asociate acestor partiţii. Atunci, avem

$$\omega' \leq \Omega'' \quad \text{şi} \quad \omega'' \leq \Omega'$$

adică orice sumă Darboux inferioară asociată funcţiei f şi corespunzătoare unui mod de divizare nu poate întrece suma Darboux superioară asociată aceleiaşi funcţii şi corespunzătoare oricărui alt mod de divizare a mulţimii D.

4. Mulţimea tuturor sumelor Darboux superioare corespunzătoare funcţiei (4.4) este mărginită inferior, un minorant al acesteia fiind oricare dintre sumele Darboux inferioare asociate aceleiaşi funcţii.

5. Mulţimea tuturor sumelor Darboux inferioare corespunzătoare funcţiei f din (4.4) este mărginită superior, un majorant al acestei mulţimi fiind oricare din sumele Darboux superioare asociate funcţiei f.

6. Dacă notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea divizărilor mulţimii D, atunci există numerele reale:

$$\overline{J} = \inf\{S_\Delta(f) : \Delta \in \mathcal{D}\}; \quad \underline{J} = \sup\{s_\Delta(f) : \Delta \in \mathcal{D}\},$$

care se numesc *integralele Darboux superioară* şi respectiv *inferioară* ale funcţiei $f : D \subset I\!R^2 \to I\!R$.

Teorema 4.3.1 *Integralele Darboux inferioară şi superioară ale funcţiei reale de două variabile reale f definită pe mulţimea carabilă $D \subset I\!R^2$ satisfac inegalitatea*

$$\underline{J} \ \leq \ \overline{J}.$$

Demonstraţie. Presupunem contrariul şi anume că $\underline{J} > \overline{J}$. Atunci, există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\underline{J} - \overline{J} > \varepsilon > 0. \tag{4.12}$$

Pe de altă parte, după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară şi superioară, putem spune că pentru $\varepsilon > 0$ de mai sus există o sumă Darboux superioară Ω_1 şi o sumă Darboux inferioară ω_2 astfel încât

$$\Omega_1 - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{şi} \quad \underline{J} - \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde deducem

$$\Omega_1 - \omega_2 + (\underline{J} - \overline{J}) < \varepsilon.$$

În consecinţă, în conformitate cu (4.12), avem

$$\Omega_1 - \omega_2 < 0$$

care contrazice proprietatea 3. a sumelor Darboux. ■

4.4 Condiţii de integrabilitate

Proprietăţile sumelor Darboux inferioare şi superioare permit stabilirea unei condiţii necesare şi suficiente pentru integrabilitatea funcţiei reale f definită şi mărginită pe o mulţime carabilă din $I\!R^2$.

Lema 4.4.1 (**Darboux**) *Integrala superioară* $\overline{J}$ (*respectiv integrala inferioară* $\underline{J}$) *este limita pentru* $\|\Delta\| \to 0$ *a sumelor Darboux superioare* (*respectiv a sumelor Darboux inferioare*).

Demonstraţie. Introducem mai întâi noţiunea de **frontieră** a partiţiei Δ a mulţimii D. Dacă partiţia $\Delta \in \mathcal{D}$ este compusă din submulţimile D_i, atunci reuniunea $\partial\Delta$ a frontierelor ∂D_i ale mulţimilor D_i se numeşte frontiera partiţiei Δ. Prin urmare,

$$\partial\Delta = \partial D_1 \;\cup\; \partial D_2 \;\cup\; \cdots \cup\; \partial D_n.$$

Frontierele ∂D_i fiind de arie nulă oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$, rezultă că frontiera divizării $\partial\Delta$ este de arie nulă.

În plus, putem afirma că frontiera $\partial\Delta$ se poate prezenta în cele din urmă ca reuniune de curbe închise, care sunt mulţimi închise în $I\!R^2$, şi ca urmare $\partial\Delta$ este o mulţime închisă în $I\!R^2$.

Având în vedere cine este $\overline{J}$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o divizare Δ^* a mulţimii D cu proprietatea că suma Darboux superioară Ω^* satisface condiţia

$$0 \;\leq\; \Omega^* \;-\; \overline{J} \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Frontiera $\partial\Delta^*$ a divizării Δ^* poate fi scufundată întro mulţime poligonală Q de arie mai mică decât $\varepsilon/(2M)$, unde $M = \sup\{\,|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$, incluziunea $\partial\Delta^* \subset Q$ fiind strictă. Frontiera $\partial\Delta^*$ şi frontiera mulţimii poligonale Q sunt două mulţimi închise în $I\!R^2$ care nu au puncte comune. În consecinţă, distanţa dintre aceste mulţimi este un număr pozitiv α. Considerăm acum o partiţie arbitrară $\Delta \in \mathcal{D}$ cu proprietatea $\|\Delta\| < \alpha$. Elementele partiţiei Δ, deci mulţimile D_i, au următoarea proprietate evidentă: dacă D_i şi $\partial\Delta^*$ au cel puţin un punct în comun, atunci mulţimea D_i este strict inclusă în interiorul mulţimii poligonale Q. Asemenea mulţimi componente ale partiţiei Δ vor fi numite *elemente frontieră*, iar toate celelalte elemente, care nu se încadrează în această categorie, le vom numi *elemente interioare*. Să arătăm acum că oricărei partiţii $\Delta \in \mathcal{D}$ cu $\|\Delta\| < \alpha$, corespunde o sumă Darboux superioară Ω care diferă de integrala Darboux superioară $\overline{J}$ cu mai puţin decât ε. Pentru aceasta împărţim termenii care intră în definiţia sumei Ω în două grupe de termeni

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} M_i\, S_i = \sum{}' M_i'\, S_i' + \sum{}'' M_i''\, S_i'',$$

unde sumarea în penultima sumă se extinde la toate elementele interioare în timp ce, în ultima sumă, sumarea se referă la elementele frontieră. Să evaluăm separat fiecare din aceste sume. Fiecare element interior al partiţiei Δ este strict inclus întrun element al partiţiei Δ^*. Fiindcă marginea superioară M_i' a valorilor funcţiei $f(x,y)$, pe un element interior al divizării Δ, nu depăşeşte marginea superioară a aceleiaşi funcţii pe elementul divizării Δ^* care conţine elementul interior respectiv, rezultă că partea din suma Darboux superioară Ω referitoare la elementele interioare nu poate întrece pe Ω^*, adică

$$\sum{}' M_i' S_i' \;\leq\; \Omega^*.$$

Mai departe, avem inegalităţile evidente:

$$|M_i''| \leq M\,; \quad \sum{}'' S_i'' < \text{aria } Q < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

În consecinţă, vom avea satisfăcută inegalitatea

$$|\sum{}'' M_i'' S_i''| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

şi ca urmare,

$$\Omega = \sum{}' M_i' S_i' + \sum{}'' M_i'' S_i'' \;\leq\; \Omega^* + \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \overline{J} + \varepsilon.$$

Aşadar am demonstrat că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un număr α care depinde de ε încât oricare ar fi divizarea Δ cu $\|\Delta\| < \alpha$, avem

$$\Omega \;-\; \overline{J} \;<\; \varepsilon$$

rezultat care arată că limita, pentru norma divizărilor tinzând la zero, a sumelor Darboux superioare este integrala superioară Darboux. În mod asemănător se demonstrează şi cealaltă afirmaţie a lemei. ■

Teorema 4.4.1 (**Criteriul de integrabilitate a lui Darboux**). *O funcţie mărginită $f(x,y)$ definită pe o mulţime mărginită şi carabilă $D \subset \mathbb{R}^2$ este integrabilă pe D dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi partiţia Δ a mulţimii D cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, să avem*

$$S_\Delta(f) \;-\; s_\Delta(f) \;<\; \varepsilon. \tag{4.13}$$

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Dacă f este o funcţie mărginită şi integrabilă pe mulţimea plană mărginită şi carabilă D, atunci există numărul real J

$$J = \iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

iar acest număr este limita sumelor integrale Riemann pentru $\|\Delta\| \to 0$, care nu depinde de alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, unde $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ este o divizare a mulţimii D. De aici rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$ cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ are loc inegalitatea

$$|\,\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \;-\; J\,| \;<\; \frac{\varepsilon}{2},$$

care poate fi scrisă şi în forma echivalentă

$$J \;-\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \;<\; J \;+\; \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.14}$$

De asemenea, ştim că sumele Darboux superioară şi inferioară corespunzătoare partiţiei $\Delta \in \mathcal{D}$ sunt respectiv marginea superioară şi marginea inferioară a sumelor integrale Riemann asociate acelei divizări. Prin urmare, putem lua o divizare fixată $\Delta \in \mathcal{D}$ şi să alegem punctele intermediare $(\xi'_i, \eta'_i) \in D_i$ şi $(\xi''_i, \eta''_i) \in D_i$ astfel încât să fie satisfăcute următoarele inegalităţi:

$$\Omega - \sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i, \eta'_i)\,S_i < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi''_i, \eta''_i)\,S_i - \omega < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Fiecare din cele două sume integrale Riemann din (4.15) satisface condiţia (4.14) şi, ca urmare, din (4.15) obţinem rezultatul dorit, adică (4.13).
Condiţia este suficientă. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$ cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ să avem (4.13), atunci $\underline{J} = \overline{J}$.

Într-adevăr, din proprietăţile sumelor Darboux avem

$$s_\Delta(f) \;\leq\; \underline{J} \;\leq\; \overline{J} \;\leq\; S_\Delta(f) \tag{4.16}$$

pentru orice diviziune Δ a lui D. Dacă $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, din inegalitatea (4.16) şi din condiţia (4.13), obţinem

$$0 \;\leq\; \overline{J} \;-\; \underline{J} \;\leq\; S_\Delta(f) \;-\; s_\Delta(f) \;<\; \varepsilon$$

adică $0 \leq \overline{J} - \underline{J} < \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost presupus arbitrar rezultă că $\underline{J} = \overline{J}$.

Să notăm valoarea comună a cantităţilor $\underline{J}$ şi $\overline{J}$ cu J şi să arătăm că J este limita pentru $\|\Delta\| \to 0$ a sumelor integrale Riemann asociate funcţiei f, adică este integrala dublă a funcţiei f pe domeniul de integrare D. După lema lui Darboux, J este limita comună pentru $\|\Delta\| \to 0$ a sumelor Darboux inferioare şi superioare asociate funcţiei f şi modurilor de divizare $\Delta \in \mathcal{D}$, adică

$$J = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s_\Delta(f) \;=\; \lim_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta(f). \tag{4.17}$$

Pe de altă parte, avem

$$s_\Delta(f) \;\leq\; \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \;\leq\; S_\Delta(f) \tag{4.18}$$

oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$ şi oricare ar fi punctele intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.

Trecerea la limită în (4.18) pentru $\|\Delta\| \to 0$ şi folosirea lui (4.17) conduce la rezultatul dorit. ∎

Observaţia 4.4.1 *Din criteriul de integrabiliate a lui Darboux rezultă că o funcţie reală f, definită şi mărginită pe o mulţime mărginită şi carabilă din $\mathbb{R}^2$, este integrabilă pe D, dacă şi numai dacă integralele Darboux corespunzătoare, $\underline{J}$ şi $\overline{J}$ sunt egale. Valoarea comună a celor două integrale $J = \underline{J} = \overline{J}$ este tocmai integrala lui f pe domeniul de integrare D.*

4.5 Clase de funcţii integrabile

În cele ce urmează vom considera funcţii definite pe mulţimi mărginite şi închise, deci mulţimi compacte în $\mathbb{R}^2$, care sunt carabile.

Aplicând Teorema 4.4.1, vom stabili integrabilitatea unor clase importante de funcţii prima dintre ele fiind clasa funcţiilor continue.

Teorema 4.5.1 *Orice funcţie continuă f definită pe mulţimea compactă $D \subset \mathbb{R}^2$ este integrabilă pe D.*

Demonstraţie. Fie $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ o divizare oarecare a lui D. Deoarece funcţia f este continuă pe D, va fi funcţie continuă pe fiecare domeniu compact D_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Însă, o funcţie continuă pe o mulţime

compactă este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile. Prin urmare, funcţia f este mărginită pe D_i şi îşi atinge marginile. Putem afirma că există două puncte $\mathbf{x}'_i = (x'_i, y'_i)$ şi $\mathbf{x}''_i = (x''_i, y''_i)$ din D_i astfel încât să avem:

$$m_i = f(x'_i, y'_i); \quad M_i = f(x''_i, y''_i).$$

Rezultă

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\, S_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i))\, S_i.$$

Deoarece f este continuă pe o mulţime compactă ea este mărginită şi uniform continuă pe acea mulţime. Uniforma continuitate a funcţiei f implică că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice două puncte $\mathbf{x}' = (x', y')$ şi $\mathbf{y} = (x'', y'')$ cu

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\; < \;\; \delta(\varepsilon)$$

să avem

$$|\, f(x', y') \;\; - \;\; f(x'', y'')\,| \;\; < \;\; \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Pentru orice diviziune Δ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ avem

$$d(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}''_i) \;\; < \;\; \delta(\varepsilon)$$

şi deci

$$|\, f(x'_i, y'_i) \;\; - \;\; f(x''_i, y''_i)\,| \;\; < \;\; \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Aşadar, dacă $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \sum_{i=1}^{n} |\, f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i)\,|\, S_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \cdot \text{aria } D = \varepsilon$$

adică $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, $(\forall)\ \Delta$, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$. Deci f este integrabilă pe D. ∎

Condiţia de continuitate a integrantului este destul de restrictivă. De aceea, teorema următoare stabileşte existenţa integralei duble pentru o clasă de funcţii discontinue.

Teorema 4.5.2 *Dacă funcţia $f(x, y)$ este mărginită pe mulţimea compactă D şi este continuă peste tot în D cu excepţia unei mulţimi de arie nulă, atunci ea este integrabilă pe D.*

Demonstraţie. Luăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din ipoteză, $f(x,y)$ este mărginită, aceasta însemnând că există un număr real K astfel încât $|f(x,y)| \leq K$. Să scufundăm partea din mulţimea D, unde funcţia f este discontinuă, întro mulţime poligonală Q de arie mai mică decât $\varepsilon/(4K)$, astfel încât această mulţime să fie strict inclusă în mulţimea poligonală Q. Notăm cu $\widetilde{D}$ partea din domeniul de integrare D care nu este inclusă în interiorul lui Q. Punctele frontieră ale mulţimii poligonale Q care aparţin lui D sunt situate în $\widetilde{D}$ şi prin urmare $\widetilde{D}$ este mulţime închisă şi mărginită deci compactă. Restricţia funcţiei f la mulţimea compactă $\widetilde{D}$ este continuă prin urmare este uniform continuă. Alegem $\delta > 0$ astfel încât oscilaţia funcţiei f în orice parte a mulţimii $\widetilde{D}$, cu diametrul mai mic decât δ, să fie mai mică decât $\varepsilon/(2S)$, unde S este aria lui D. Considerăm acum o partiţie $\Delta = \{D_i : i = \overline{1,n}\}$ a domeniului de integrare D cu proprietatea ca primul element D_1 să coincidă cu Q, iar toate celelalte element să aibă diametrele mai mici decât δ şi să evaluăm diferenţa $\Omega - \omega$ pentru această divizare. Avem

$$\Omega - \omega = M_1 S_1 - m_1 S_1 + \sum_{i=2}^{n}(M_i - m_i)S_i < (M_1 - m_1)\frac{\varepsilon}{4K} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\varepsilon}{2S}\, S_i.$$

Însă $M_1 - m_1 \leq 2K$ şi $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{\varepsilon}{2S}\, S_i < S$, astfel că

$$\Omega - \omega \;<\; 2K\frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2S}\, S = \varepsilon.$$

Numărul $\varepsilon > 0$ fiind ales arbitrar, în baza Teoremei 4.4.1 funcţia f este integrabilă pe submulţimea compactă D a lui $\mathbb{R}^2$. ∎

4.6 Proprietăţile integralei duble

Proprietăţile fundamentale ale integralei duble sunt complet analoage proprietăţilor integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx$$

şi de aceea vom enumera aceste proprietăţi urmând a da demonstraţia doar pentru una din ele.

1. Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile pe domeniul de integrare D, iar λ şi μ sunt constante reale arbitrare, atunci funcţia $\lambda\, f+\mu\, g$ este integrabilă pe D şi

$$\iint\limits_{D} (\lambda\, f +\, \mu\, g)(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy + \mu \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy.$$

Aceasta este proprietatea de *liniaritate* a integralei duble.

2. Dacă $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1, D_2 sunt mulţimi compacte în $I\!R^2$ care nu au puncte interioare comune şi funcţia $f : D \to I\!R$ este integrabilă pe D, atunci f este integrabilă pe fiecare din mulţimile D_1 şi D_2 şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Aceasta este proprietatea de *aditivitate* a integralei duble ca funcţie de domeniu de integrare.

3. Dacă f este integrabilă pe D şi

$$f(x,y) \;\; \geq \;\; 0, \quad (\forall)\;\, (x,y) \in D,$$

atunci integrala dublă din funcţia f satisface inegalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \;\; \geq \;\; 0.$$

4. Dacă f şi D sunt integrabile pe D şi

$$f(x,y) \;\; \leq \;\; g(x,y), \quad (\forall)\;\, (x,y) \in D,$$

atunci între integralele celor două funcţii avem inegalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \;\; \leq \;\; \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy.$$

Aceasta este proprietatea de *monotonie* a integralei duble. Ea implică următoarele două proprietăţi.

5. (*evaluarea valorii absolute a integralei duble*). Dacă f este integrabilă pe D, atunci funcţia valoarea absolută a lui f este integrabilă pe D şi

$$\Big|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\Big| \;\leq\; \iint\limits_D |\,f(x,y)\,|dxdy.$$

6. (*teorema valorii medii*). Dacă o funcţie f este integrabilă pe D şi satisface inegalitatea

$$m \;\leq\; f(x,y) \;\leq\; M, \quad (\forall)\ (x,y)\in D,$$

iar S este aria lui D, atunci

$$m\,S \;\leq\; \iint\limits_D f(x,y)dxdy \;\leq\; M\,S.$$

Dacă funcţia f este în plus continuă pe D, atunci teorema valorii medii devine

7. Dacă f este funcţie continuă pe domeniul compact de integrare D, atunci există un punct $(\xi,\eta)\in D$, astfel încât

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\,S.$$

8. Este evidentă egalitatea

$$\iint\limits_D dxdy = \text{aria } D = S.$$

Demonstraţia teoremei valorii medii pentru funcţii continue. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D, rezultă că f este mărginită pe D şi îşi atinge marginile. Prin urmare, există punctele $\mathbf{x}_1 = (x_1,y_1)\in D$, $\mathbf{x}_2 = (x_2,y_2)\in D$ astfel încât

$$m = f(x_1,y_1), \quad M = f(x_2,y_2),$$

unde m şi M sunt marginile lui f. Pentru simplitate, să presupunem că ambele puncte sunt în interiorul domeniului de integrare D, demonstraţia

fiind ceva mai complicată dacă unul sau ambele puncte $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ se situează pe frontiera lui D. În baza uneia din proprietăţile de mai sus, avem

$$mS \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS,$$

de unde rezultă

$$m \quad \leq \quad \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy}{S} \quad \leq \quad M.$$

Notând

$$\mu = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy}{S}$$

avem evident inegalităţile

$$m \quad \leq \quad \mu \quad \leq \quad M.$$

Fie Γ o curbă a cărei imagine este complet conţinută în D şi având capetele $A_1(x_1,x_2)$ şi $A_2(x_2,y_2)$. Existenţa unei astfel de curbe rezultă chiar din definiţia noţiunii de domeniu. Dacă

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\,, \\ y = \psi(t)\,, \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

este o reprezentare parametrică a lui Γ, atunci funcţia compusă

$$g:[a,b]\to I\!R\,,\quad g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$$

este continuă pe compactul $[a,b]$. Din $f(x_1,y_1)=m$ şi $f(x_2,y_2)=M$ rezultă $g(a)=m$ şi $g(b)=M$.

Din proprietatea lui Darboux a funcţiilor continue deducem existenţa unei valori $t_0\in[a,b]$ aşa fel încât $g(t_0)=\mu$, adică

$$f(\varphi(t_0),\psi(t_0))=\mu.$$

Dacă luăm $\xi=\varphi(t_0)$ şi $\eta=\psi(t_0)$ avem $\mu=f(\xi,\eta)$ şi teorema valorii medii pentru cazul când funcţia de integrat este continuă este demonstrată. ■

4.7 Evaluarea integralei duble

4.7.1 Integrala dublă pe intervale bidimensionale închise

Teorema 4.7.1 *Dacă funcţia reală mărginită, de două variabile reale,*

$$f : [a, b] \times [c, d] \to I\!R, \quad -\infty < a < b < +\infty, \; -\infty < c < d < +\infty$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional închis

$$I_2 = [a, b] \times [c, d]$$

şi pentru orice $x \in [a, b]$ există numărul real $F(x)$ definit de integrala depinzând de parametrul x

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad x \in [a, b], \tag{4.19}$$

atunci funcţia $F : [a, b] \to I\!R$, ale cărei valori sunt date în (4.19), *este integrabilă Riemann şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{I_2} f(x, y) dxdy = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y) dy \Big) dx. \tag{4.20}$$

Demonstraţie. Fie d' şi d'' diviziuni ale respectiv intervalelor $[a, b]$ şi $[c, d]$

$$\begin{aligned} d' &= \{x_0, x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n\}, \\ d'' &= \{y_0, y_1, \cdots, y_j, y_{j+1}, \cdots, y_m\}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

unde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_m = d.$$

Aceste diviziuni definesc diviziunea Δ a intervalului bidimensional închis I_2

$$\Delta = \{I_{00},\, I_{10},\, \cdots\, I_{ij},\, \cdots\, I_{nm}\}, \tag{4.22}$$

unde I_{ij} sunt intervalele bidimensionale închise

$$I_{ij} = [x_i,\, x_{i+1}] \times [y_j,\, y_{j+1}], \qquad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Notăm

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y): \ (x,y) \in I_{ij}\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y): \ (x,y) \in I_{ij}\}.$$

Aceste cantităţi sunt numere reale deoarece funcţia f este mărginită pe fiecare din intervalele bidimensioanle închise I_{ij}.

Deoarece se urmăreşte a se demonstra că funcţia F definită de (4.19) este integrabilă Riemann va trebui să considerăm sumele integrale Riemann corespunzătoare tuturor diviziunilor d' de forma (4.20) ale intervalului $[a,b]$, pentru alegeri arbitrare ale punctelor intermediare $\xi_i \in [x_i,\, x_{i+1}]$. Aceste sume au forma

$$\sigma_{d'}(F,\, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{4.23}$$

Dacă ţinem seama de modul cum este definită funcţia F şi de proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei Riemann, avem

$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i,\, y)dy \ = \ \sum_{i=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,\, y)dy. \tag{4.24}$$

Aplicând formula de medie pentru integralele simple care intră în membrul al doilea din (4.24) deducem că există numerele reale μ_{ij}, cu $m_{ij} \le \mu_{ij} < M_{ij}$, astfel încât

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,\, y)dy = \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j). \tag{4.25}$$

Folosind acum (4.25) în (4.23) constatăm că suma Riemann $\sigma_{d'}(F,\, \xi_i)$ se scrie în final în forma

$$\sigma_{d'}(F,\, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Dacă ţinem seama de inegalităţile

$$m_{ij} \le \mu_{ij} \le M_{ij}, \quad (i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1})$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \le \sigma_{d'}(F,\, \xi_i) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Dar prima sumă din aceste inegalităţi este tocmai suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la diviziunea Δ din (4.22)

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Ultima sumă din inegalităţile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la aceeaşi diviziune Δ

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Avem deci inegalăţile $s_\Delta(f) \le \sigma_{d'}(F,\, \xi_i) \le S_\Delta(f)$ pentru orice diviziune Δ de forma (4.22) şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i.

Fie acum $(d'_k)_{k\in I\!N^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că şirul normelor acestor diviziuni $(\|d\text{''}_k\|)_{k\in I\!N^*}$ este convergent la zero. Fie de asemeni $(d''_k)_{k\in I\!N^*}$ un şir de diviziuni ale lui $[c,d]$ cu $\|d''_k\| \to 0$. Notăm cu Δ_k diviziunea intervalului bidimensional închis $I_2 = [a,b]\times[c,d]$ definită de diviziunile d'_k şi d''_k. Se vede imediat că din condiţiile $\|d'_k\| \to 0$ şi $\|d''_k\| \to 0$ rezultă $\|\Delta_k\| \to 0$. Pentru fiecare k avem inegalităţile

$$s_{\Delta_k}(f) \le \sigma_{d'_k}(F,\, \xi_i) \le S_{\Delta_k}(f). \tag{4.26}$$

Funcţia f fiind presupusă integrabilă pe I_2, aplicând criteriul de integrabilitate a lui Darboux, avem

$$\lim_{k\to\infty} S_{\Delta_k}(f) = \lim_{k\to\infty} s_{\Delta_k}(f) = \iint_{I_2} f(x,y)dxdy. \tag{4.27}$$

Trecând la limită în (4.26) pentru $k \to +\infty$ şi ţinând cont de (4.27) obţinem

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{d'_k}(F,\, \xi_i) = \iint_{I_2} f(x,y)dxdy. \tag{4.28}$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei pentru funcţiile reale de o variabilă reală

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{d'_k}(F,\, \xi_i) = \int_a^b F(x)dx. \tag{4.29}$$

Din egalităţile (4.28) şi (4.29) obţinem (4.21). De obicei se foloseşte notaţia

$$\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{4.30}$$

Folosind notaţia (4.30) constatăm că (4.21) se scrie în forma

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{4.31}$$

Putem spune că (4.22) sau (4.31) reprezintă *formula de calcul a integralei duble pe un interval bidimensional închis.* Observăm că integrala dublă pe un interval bidimensional închis este o iteraţie de integrale simple adică un calcul succesiv a două integrale Riemann ale unor funcţii reale de o variabilă reală, prima dintre ele fiind o integrală depinzând de parametru. ■

În mod asemănător se demonstrează

Teorema 4.7.2 *Dacă funcţia reală mărginită, de două variabile reale,*

$$f : [a,b] \times [c,d] \to I\!R, \quad -\infty < a < b < +\infty, \; -\infty < c < d < +\infty$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional închis $I_2 = [a,b] \times [c,d]$ *şi pentru orice* $y \in [c,d]$ *există numărul real* $G(y)$ *definit de integrala depinzând de parametrul* y

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

atunci funcţia

$$G : [c,d] \to I\!R, \quad G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \; y \in [c,d]$$

este integrabilă Riemann şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy. \tag{4.32}$$

Folosind şi aici o notaţie asemănătoare lui (4.30), şi anume

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

vedem că relaţia (4.32) se scrie în forma

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{4.33}$$

Relaţia (4.33) reprezintă de asemeni o formulă de calcul a integralei duble din funcţia f pe intervalul bidimensional închis I_2.

Observaţia 4.7.1 *Când sunt satisfăcute ipotezele din ambele teoreme de mai sus, avem*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy. \tag{4.34}$$

Prima egalitate din (4.34) a fost demonstrată în teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru.

Observaţia 4.7.2 *Dacă $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ şi $g : [a,b] \to I\!R$, $h : [c,d] \to I\!R$ sunt integrabile Riemann, atunci f este integrabilă pe intervalul bidimensional închis $I_2 = [a,b] \times [c,d]$ şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy,$$

relaţie care arată că în acest caz particular integrala dublă este un produs de integrale simple.

4.7.2 Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa Oy

Definiţia 4.7.1 *Mulţimea $D_y \subset I\!R^2$ definită de*

$$D_y = \{(x,y) \in I\!R^2 : \;\; a \le x \le b, \;\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \;(\forall)\, x \in [a,b]\}, \tag{4.35}$$

unde φ_1 şi φ_2 sunt funcţii continue pe $[a,b]$, se numeşte **domeniu simplu în raport cu axa** Oy.

Observaţia 4.7.3 *Frontiera domeniului simplu în raport cu axa Oy definit în relaţia (4.35) este curba netedă pe porţiuni (C^+) compusă din arcele (AB), (CD) şi din segmentele de dreaptă $\overline{BC}$ şi $\overline{DA}$, unde*

$$\begin{cases} (AB) = \{(x,y) \in I\!R^2 : \;\; a \le x \le b, \;\; y = \varphi_1(x), \;\; x \in [a,b]\}, \\ \overline{BC} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \;\; x = b, \;\; \varphi_1(b) \le y \le \varphi_2(b)\}, \\ (CD) = \{(x,y) \in I\!R^2 : \;\; x \in [b,\, a], \;\; y = \varphi_2(x), \;\; x \in [b,\, a]\}, \\ \overline{DA} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \;\; x = a, \;\; y \in [\varphi_2(b),\, \varphi_1(a)]\}. \end{cases} \tag{4.36}$$

Aşa cum a fost definită în (4.36), frontiera (C^+) a domeniului simplu în raport cu axa Oy este o curbă orientată pozitiv căci un observator care parcurge această frontieră în sensul indicat de (4.36) *vede* mulţimea D_y mereu la stânga sa. Să menţionăm în plus că este posibil ca unul sau ambele segmente de dreaptă din (4.36) să se reducă la un punct. Aceasta se va întâmpla când funcţiile φ_1 şi φ_2 au valori egale în $x = a$ sau (şi) în $x = b$.

Observaţia 4.7.4 *Dacă D_y este un domeniu simplu în raport cu axa Oy, atunci orice paralelă la axa Oy prin punctul $M(x,\, 0)$, unde $a < x < b$, intersectează frontiera acestei mulţimi în două puncte distincte P şi Q de coordonate: $P(x,\, \varphi_1(x))$; $Q(x,\, \varphi_2(x))$. Acestor puncte le vom spune: $P-$* **punct de intrare în D_y; $Q-$ punct de ieşire din D_y.**

Regula de calcul a unei integrale duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy este dată de teorema care urmează.

Teorema 4.7.3 *Fie D_y un domeniu simplu în raport cu axa Oy definit de inegalităţile:*

$$a \leq x \leq b; \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

şi f o funcţie reală mărginită definită pe mulţimea D_y.
Dacă f este integrabilă pe D_y şi pentru orice $x \in [a, b]$, fixat, există integrala depinzând de parametrul x

$$J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy,$$

atunci funcţia $J : [a, b] \to I\!R$ este integrabilă şi

$$\int_a^b J(x)dx = \iint\limits_{D_y} f(x, y)dxdy.$$

Demonstraţie. Înainte de a începe demonstraţia propriuzisă să observăm că având în vedere expresia valorii în $x \in [a, b]$ a funcţiei J, integrala definită a acesteia se poate scrie în una din următoarele forme

$$\int_a^b J(x)dx = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\Big)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Concluzia teoremei devine

$$\iint\limits_{D_y} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \tag{4.37}$$

care reprezintă *formula de calcul a integralei duble* pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy.

Să procedăm acum la demonstraţia teoremei.

Fie $c = \min\{\varphi_1(x);\; x \in [a,b]\}$ şi $d = \max\{\varphi_2(x);\; x \in [a,b]\}$ care sunt numere reale în baza faptului că funcţiile φ_1 şi φ_2 sunt continue pe mulţimea compacă $[a,b]$. După teorema lui Weierstrass, funcţiile φ_1 şi φ_2 sunt mărginite şi îşi ating efectiv marginile. Atunci, intervalul bidimensional $I_2 = [a,b] \times [c,d]$ include domeniul simplu D_y.

Funcţia auxiliară

$$f^* : I_2 \to \mathbb{R}, \quad f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D_y \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \in I_2 \setminus D_y. \end{cases} \tag{4.38}$$

satisface ipotezele Teoremei 4.7.1. Într-adevăr, deoarece valorile sale coincid cu cele ale funcţiei f pe mulţimea D_y, rezultă că f^* este integrabilă pe D_y. Restricţia lui f^* la mulţimea $I_2 \setminus D_y$ fiind funcţia identic nulă, rezultă că este funcţie integrabilă pe $I_2 \setminus D_y$. Dacă la aceste două rezultate adăugăm proprietatea de aditivitate a integralei duble, deducem că funcţia f^* din (4.38) este integrabilă. Mai mult, avem

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_y} f^*(x,y)dxdy &= \iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy \\ \iint\limits_{I_2 \setminus D_y} f^*(x,y)dxdy &= 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

În baza proprietăţii de aditivitate a integralei duble, din (4.39) rezultă

$$\iint\limits_{I_2} f^*(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy. \tag{4.40}$$

Pentru fiecare valoare a lui x situat între a şi b, are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)dy + \\ + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \end{aligned} \tag{4.41}$$

deoarece fiecare din integralele din membrul doi există. Apoi, dat fiind faptul că pe segmentele de dreaptă incluse în I_2 şi care unesc respectiv perechile de puncte (x, c), $(x, \varphi_1(x))$ şi $(x, \varphi_2(x))$, (x, d), valorile funcţiei f^* sunt egale cu zero, deducem că prima şi a treia integrală din membrul doi al relaţiei (4.41) sunt nule, fapt ce conduce la egaliatatea

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{4.42}$$

Funcţia f^* definită pe intervalul bidimensional I_2 satisface ipotezele Teoremei 4.7.1 şi, în consecinţă, integrala dublă din ea peste I_2 poate fi redusă la iteraţia de integrale simple

$$\iint\limits_{I_2} f^*(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y)\, dy. \tag{4.43}$$

Din (4.43), (4.40) şi (4.42), rezultă are loc relaţia (4.37). ■

4.7.3 Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa Ox

Definiţia 4.7.2 *Mulţimea $D_x \subset I\!R^2$ definită de*

$$D_x = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ (\forall)\, y \in [c, d]\},$$

unde ψ_1 şi ψ_2 sunt funcţii continue pe $[c, d]$ se numeşte **domeniu simplu în raport cu axa Ox**.

Observaţia 4.7.5 *Dacă D_x este un domeniu simplu în raport cu axa Ox, atunci orice paralelă la axa Ox prin punctul $M(0, y)$, unde $c < y < d$, intersectează frontiera acestei mulţimi în două puncte distincte P şi Q de coordonate: $P(\psi_1(y), y)$; $Q(\psi_2(y), y)$. Ca şi la domenii simple în raport cu cealaltă axă de coordonate, acestor puncte le vom spune: $P-$* **punct de intrare în D_x**; *$Q-$* **punct de ieşire din D_x**.

Regula de calcul a unei integrale duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox este asemănătoare cu aceea prezentată în concluzia teoremei precedente şi este dată de teorema care urmează.

Teorema 4.7.4 *Fie D_x un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi f o funcţie reală mărginită definită pe mulţimea D_x. Dacă f este integrabilă pe D_x şi pentru orice $y \in [c,d]$ există integrala depinzând de parametrul y*

$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

atunci funcţia $I : [a,b] \to I\!R$ este integrabilă şi are loc egalitatea

$$\int_c^d I(y)dy = \iint\limits_{D_x} f(x,y)dxdy. \tag{4.44}$$

Observaţia 4.7.6 *Având în vefere că integrala definită din funcţia I pe intervalul $[c,d]$ se poate scrie în una din formele*

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

rezultă că egalitatea (4.44) *se poate scrie în forma echivalentă*

$$\iint\limits_{D_x} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{4.45}$$

care constituie formula de calcul a integralei duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox.

Observaţia 4.7.7 *Dacă domeniul de integrare D nu este simplu în raport cu una din axele de coordonate, atunci descompunem pe D prin paralele la axele de coordonate întrun număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \cdots, D_n$, simple în raport cu aceeaşi axă de coordonate, astfel încât interioarele oricăror două astfel de domenii D_i şi D_j, cu $i \neq j$, să fie disjuncte, iar reuniunea lor să fie mulţimea D. Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei duble în raport cu domeniul de integrare, avem*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy, \tag{4.46}$$

urmând ca, pentru toate integralele duble din membrul doi al egalităţii (4.46), *să se aplice una din formulele de calcul* (4.37) *sau* (4.45).

Exercițiul 4.7.1 *Să se scrie integrala dublă*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele

$$y=\sqrt{2ax-x^2},\quad y=\sqrt{2ax},\quad x=2a,\quad a>0,$$

ca o iterație de integrale simple, în ambele ordini de integrare.

Soluție. Domeniul D este mărginit de semicercul superior (aflat în semiplanul $y\geq 0$) al cercului de rază a cu centrul în punctul $C(a,0)$, de un segment din parabola cu vârful în origine având axa de simetrie semiaxa pozitivă Ox și de un segment din dreapta de ecuație $x=2a$, paralelă cu axa Oy. Constatăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Oy deoarece putem scrie

$$D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 2a;\ \sqrt{2ax-x^2}\leq y\leq \sqrt{2ax}\}.$$

Prin urmare, folosind (4.37), avem

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,dy.$$

Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Ox. Paralela $y=a$ la axa Ox descompune D în trei domenii D_1, D_2, D_3, simple în raport cu axa Ox, unde:

$$\begin{array}{rcl} D_1 &=& \{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ 0\leq y\leq a;\ \dfrac{y^2}{2a}\leq x\leq a-\sqrt{a^2-y^2}\};\\ D_2 &=& \{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ 0\leq y\leq a;\ a+\sqrt{a^2-x^2}\leq x\leq 2a\};\\ D_3 &=& \{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ a\leq y\leq 2a;\ \dfrac{y^2}{2a}\leq x\leq 2a\}, \end{array}$$

Ținând cont de (4.46), rezultă

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy,$$

integralele din membrul al doilea scriindu–se ca iteraţii de integrale simple, după cum urmează:

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy \;=\; \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}\}} f(x,y)dx;$$

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy \;=\; \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-x^2}}^{2a} f(x,y)dx;$$

$$\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy \;=\; \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

Astfel, am scris integrala dublă ca iteraţie de integrale simple în ambele ordini. De remarcat că prima scriere este mai simplă. ■

4.8 Formula integrală Riemann–Green

În anumite condiţii există o legătură între integrala curbilinie şi integrala dublă. Pentru a stabili această legătură introducem noţiunea de *frontieră orientată* a unui domeniu plan compact.

Definiţia 4.8.1 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$, un domeniu compact având frontiera $\Gamma = \partial D$ formată dintr–o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porţiuni. Sensul dat pe Γ de un observator care prin deplasare pe această curbă lasă la stânga domeniul D se numeşte* **sensul direct** *sau* **pozitiv** *de parcurgere a lui Γ. Curba Γ împreună cu sensul direct de parcurgere se numeşte curbă orientată direct sau pozitiv şi se notează cu Γ_+ sau cu Γ^+. În mod asemănător se introduce şi Γ_-.*

Când pe curba $\Gamma = \partial D$ s–a ales un sens de parcurs, curba devine orientată.

Definiţia 4.8.2 *Un domeniu plan a cărui frontieră este formată dintr–o singură curbă închisă netedă sau netedă pe porţiuni Γ se numeşte* **pozitiv orientat** *dacă curba Γ este pozitiv orientată. Dacă domeniul D este pozitiv orientat, atunci el se notează cu D_+ sau cu D^+. Analog se defineşte domeniul* **negativ orientat** *notat cu D_- sau D^-.*

Este posibil ca frontiera unui domeniu plan să fie formată din mai multe curbe plane închise netede sau netede pe porţiuni, disjuncte.

Definiţia 4.8.3 *Fie curbele plane simple, închise şi netede sau netede pe porţiuni* $\Gamma_0,\ \Gamma_1, \cdots,\ \Gamma_p$ *cu proprietăţile:*

1. *mulţimea din plan care are ca frontieră pe* Γ_0 *conţine în interiorul ei toate celelalte curbe* $\Gamma_i,\ i = \overline{1,p}$;

2. *oricare două curbe* Γ_i *şi* Γ_j *cu* $i \neq j,\ i,j \in \overline{1,p}$, *nu au puncte comune.*

Se numeşte **domeniu** $p+1$ **conex** *mulţimea* D *limitată de curba* Γ_0 *din care s–au scos mulţimile limitate de curbele* $\Gamma_1,\ \Gamma_2, \cdots,\ \Gamma_p$. *Frontiera unui astfel de domeniu* D *este reuniunea tuturor curbelor* $\Gamma_k,\ k \in \overline{0,n}$. *Domeniul se numeşte în plus* **compact** *dacă îşi conţine frontiera.*

Definiţia 4.8.4 *Domeniul compact* $p+1$ *conex* D *se numeşte* **pozitiv orientat** *dacă observatorul care se deplasează pe frontiera lui* D *vede mereu pe* D *la stânga sa.*

Un domeniu compact $p+1$ conex, pozitiv orientat, care se notează cu D_+, are *frontiera exterioară* Γ_0 orientată în sens contrar acelor de ceasornic în timp ce toate celelalte curbe $\Gamma_i,\ i = \overline{1,p}$, sunt parcurse de observator în sensul acelor de ceasornic. Pentru a intui forma unui domeniu $p+1$ conex am putea să spunem că acesta prezintă *găuri* sau *goluri*. Dacă $p = 1$, deci D are un gol, el se numeşte *dublu conex*, iar cel cu două goluri se va numi *domeniu triplu conex*. Domeniile simple în raport cu una din axele de coordonate sunt domenii simplu conexe. Un gol poate fi şi un punct.

În scopul stabilirii formulei integrale Riemann–Green pentru un domeniu compact oarecare, vom prezenta două rezultate ajutătoare, valabile în cazul domeniilor simple în raport cu una din axele de coordonate.

Teorema 4.8.1 *Fie* P *o funcţie reală definită şi continuă pe un domeniu compact pozitiv orientat* D_y, *simplu în raport cu axa* Oy *şi având frontiera* Γ_y. *Dacă derivata parţială a funcţiei* P *în raport cu variabila* y *există şi este continuă pe* D_y, *atunci are loc egalitatea*

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x,y)dx = \iint\limits_{D_y^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy. \tag{4.47}$$

Demonstraţie. Deoarece domeniul D_y este simplu în raport cu axa Oy, frontiera acestuia Γ_y este formată mai întâi din curbele netede pe porţiuni:

$$y = \varphi_1(x), \quad x \in [a, b]; \tag{4.48}$$

$$y = \varphi_2(x), \quad x \in [b, a], \tag{4.49}$$

unde funcţiile φ_1 şi φ_2 care definesc cele două porţiuni netede din frontiera Γ_y sunt continue, admit derivate continue pe porţiuni şi sunt astfel încât

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in [a, b]. \tag{4.50}$$

Cealaltă parte a frontierei Γ_y este constituită din două segmente de dreaptă situate respectiv pe drepte paralele cu axa Oy :

$$x = a, \quad \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a); \tag{4.51}$$

$$x = b, \quad \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b). \tag{4.52}$$

Pentru primul segment de dreaptă, abscisele punctelor sale sunt egale cu a, iar ordonatele sale y au proprietatea $\varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)$, în timp ce, pe cel de al doilea segment de dreaptă, abscisele punctelor sale sunt egale cu b, ordonatele fiind astfel încât $\varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)$. Dacă introducem punctele:

$$A(a, \varphi_1(a)); \quad B(b, \varphi_1(b)); \quad C(b, \varphi_2(b)); \quad D(a, \varphi_2(a)), \tag{4.53}$$

atunci frontiera pozitiv orientată Γ_y^+ a domeniului D_y^+ se poate scrie evident sub forma

$$\Gamma_y^+ = ABCDA,$$

în care sensul de parcurs este de la A spre B, apoi spre C, de aici spre D şi din nou la A.

Existenţa celor două integrale din (4.47) este asigurată de continuitatea funcţiilor de sub semnul integrală şi de ipoteza făcută asupra lui D.

Să calculăm integrala din membrul al doilea din (4.47). Avem,

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_y^+} -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy = \\ &= \int_a^b -P(x, y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b \Big(P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))\Big) dx. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Pe de altă parte, avem

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x,y)\,dx = \int_{AB} P(x,y)\,dx + \int_{\overline{BC}} P(x,y)\,dx + \\ + \int_{CD} P(x,y)\,dx + \int_{\overline{DA}} P(x,y)\,dx, \tag{4.55}$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este cel specificat mai sus.

Integralele curbilinii de speţa a doua pe $\overline{BC}$ şi pe $\overline{DA}$ sunt nule, deoarece aici x este constant, fapt care se vede din (4.51) şi (4.52). Prin urmare, $dx = 0$.

O reprezentare parametrică a arcului de curbă plană AB este dată de ecuaţiile

$$AB : \begin{cases} x = t, \\ y = \varphi_1(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{4.56}$$

Având în vedere reprezentarea parametrică (4.56) şi formula de calcul a unei integrale curbilinii de a doua speţă, deducem

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt. \tag{4.57}$$

Pentru porţiunea de frontieră formată din arcul de curbă CD, avem reprezentarea paramatrică

$$CD : \begin{cases} x = \tau, \\ y = \varphi_1(\tau), \end{cases} \quad \tau \in [b,a]. \tag{4.58}$$

Această reprezentare parametrică (4.58) şi formula de calcul a unei integrale curbilinii de a doua speţă conduc la

$$\int_{CD} P(x,y)\,dx = \int_b^a P(t,\varphi_2(t))\,dt = -\int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt. \tag{4.59}$$

Prin urmare, valoarea integralei curbilinii din membrul întâi a relaţiei de demonstrat (4.47) este

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x,y)\,dx = \int_a^b \Big(P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))\Big)\,dt. \tag{4.60}$$

Din relaţiile (4.54) şi (4.60), rezultă (4.47) şi în acest fel teorema este demonstrată. ■

Teorema 4.8.2 *Fie Q o funcţie reală definită şi continuă pe un domeniu compact pozitiv orientat D_x, simplu în raport cu axa Ox a cărui frontieră este curba închisă pozitiv orientată Γ_x^+. Dacă derivata parţială a funcţiei Q în raport cu variabila x există şi este continuă pe D_x, atunci are loc egalitatea*

$$\int_{\Gamma_x^+} Q(x,y)dx = \iint\limits_{D_x^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy. \tag{4.61}$$

Demonstraţie. Să considerăm întâi integrala dublă din membrul doi al egalităţii (4.61). După cum ştim, un domeniu simplu în raport cu axa Ox poate fi prezentat astfel

$$D_x = \{(x,y) \in I\!R^2 :\ c \le y \le d;\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}, \tag{4.62}$$

unde funcţiile ψ_1 şi ψ_2 sunt continue şi derivabile pe porţiuni. Dacă scriem domeniul de integrare în forma (4.62), atunci integrala dublă ce o avem de calculat este dată de

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_y^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \\ &= \int_c^d \Big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\Big)dy.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Să notăm cu A_1, B_1, C_1 şi D_1 punctele lui Γ_x^+ de coordonate:

$$A_1(c,\psi_1(c));\quad B_1(c,\psi_2(c));\quad C_1(d,\psi_2(d));\quad D_1(d,\psi_1(d)). \tag{4.64}$$

Atunci, frontiera pozitiv orientată Γ_x^+ a domeniului D_x^+ se poate scrie sub forma

$$\Gamma_x^+ = A_1B_1C_1D_1A_1,$$

în care sensul de parcurs este de la A_1 spre B_1, apoi spre C_1, de aici spre D_1 şi din nou la A_1. Porţiunile $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{C_1D_1}$ ale frontierei Γ_x^+ sunt segmente de drepte paralele cu axa Ox şi ca urmare pe aceste segmente avem $dy = 0$ ceea ce atrage

$$\int_{\overline{A_1B_1}} Q(x,y)\,dy = \int_{\overline{C_1D_1}} Q(x,y)\,dy = 0. \tag{4.65}$$

Integrala definită din membrul al doilea al relaţiei (4.63) poate fi privită ca suma a două integrale curbilinii pe arce de curbă corespunzătoare, după

cum urmează

$$\int_c^d \Big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\Big)dy = \int_{B_1C_1} Q(x,y)\,dy + \int_{D_1A_1} Q(x,y)\,dy. \tag{4.66}$$

Dacă la membrul doi al relaţiei (4.66) adăugăm integralele curbilinii din (4.65), obţinem

$$\begin{aligned} \int_c^d \Big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\Big)dy &= \int_{\overline{A_1B_1}} Q(x,y)dy + \\ + \int_{B_1C_1} Q(x,y)dy &+ \int_{\overline{C_1D_1}} Q(x,y)dy + \\ + \int_{D_1A_1} Q(x,y)dy &= \int_{\Gamma_x^+} Q(x,y)dy. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Din relaţiile (4.63) şi (4.67) rezultă (4.61) şi teorema este demonstrată.■

Egalitatea (4.47) a fost demonstrată pentru un domeniu de o formă specială, însă ea poate fi extinsă la un domeniu arbitrar care poate fi divizat întrun număr finit de domenii simple în raport cu axa Oy.

Astfel, dacă un domeniu oarecare D, cu frontiera Γ, este descompus în n subdomenii D_{iy}, $i = \overline{1,n}$, simple în raport cu axa Oy şi cu interioarele oricăror două dintre ele disjuncte, conform Teoremei 4.8.1, pentru fiecare din domeniile D_{iy} are loc relaţia

$$\int_{\Gamma_{iy}^+} P(x,y)\,dx \;=\; \iint\limits_{D_{iy}^+} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy, \quad \Gamma_{iy} = \partial D_{iy}. \tag{4.68}$$

Putem suma acum de la 1 la n relaţiile (4.68) obţinându–se în membru drept o integrală dublă pe domeniul D din aceeaşi funcţie de integrat ca în (4.68), iar în membrul stâng o sumă de n integrale curbilinii de speţa a doua din expresia diferenţială $P(x,y)\,dx$. Însă fiecare contur Γ_{iy}^+ constă atât din anumite arce ale frontierei lui D^+ cât şi din porţiuni de curbe auxiliare care servesc pentru divizarea domeniului D în părţile D_{iy}, cu i de la 1 până la n. Fiecare arc al unei curbe auxiliare intră în exact două contururi de tipul D_{iy} şi este parcurs în sensuri contrare când ne raportăm la cele două contururi vecine. Prin urmare, când sumăm toate integralele curbilinii de forma

$$\int_{\Gamma_{iy}^+} P(x,y)\,dx, \tag{4.69}$$

integralele curbilinii luate pe arcele auxiliare se anulează reciproc şi deci va rămâne numai integrala pe frontiera Γ^+ a domeniului D^+ din expresia diferenţială $P(x,y)\,dx$. Astfel, obţinem egalitatea

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx = \iint\limits_{D^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy, \quad \Gamma_{iy} = \partial D_{iy}. \tag{4.70}$$

Să observăm că divizarea lui D în domenii simple în raport cu axa Oy se poate efectua prin paralele la axa Oy care să fie eventual tangente în anumite puncte ale frontierei Γ sau să aibă în comun cu Γ doar un punct dacă acesta este punct unghiular.

Printr–un raţionament asemănător celui efectuat pentru demonstraţia relaţiei (4.61), deducem că egalitatea

$$\int_{\Gamma^+} Q(x,y)dy = \iint\limits_{D^+} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy \tag{4.71}$$

are loc pentru orice domeniu compact care se reprezintă ca reuniune finită de domenii simple în raport cu axa Ox. Descompunerea unui domeniu compact în domenii simple în raport cu axa Ox este posibilă întotdeauna şi se poate efectua prin construcţia unor paralele la axa Ox, paralele care, eventual, pot avea un punct comun cu frontiera domeniului.

Prin construcţia descrisă mai sus cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate, orice domeniu plan compact D^+, simplu sau multiplu conex, pozitiv orientat, având frontiera Γ^+ o reuniune finită de curbe închise netede sau netede pe porţiuni care satisfac condiţiile din Definiţia 4.8.3, se poate scrie ca reuniune finită de domenii simple în raport cu una, oricare, din axele de coordonate. Pentru astfel de domenii, pe care prescurtat le vom numi mai departe *domenii plane simple*, au loc relaţiile (4.70) şi (4.71). Sumând aceste două relaţii, obţinem formula integrală

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D^+} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy \tag{4.72}$$

cunoscută sub numele de *formula integrală Riemann–Green.* În acest fel am demonstrat

Teorema 4.8.3 *Fie D un domeniu plan simplu conex şi P, Q două funcţii reale definite şi continue pe compactul D. Dacă derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$*

există şi sunt continue pe D, atunci are loc formula integrală Riemann–Green (4.72).

Din modul cum s–a efectuat demonstraţia Teoremei 4.8.3 rezultă câteva observaţii pe care le dăm în continuare.

Observaţia 4.8.1 *Dacă frontiera Γ^+ a domeniului simplu D^+ este compusă dintr–un număr finit de conturuup separate, ceea ce înseamnă că suntem în cazul unui domeniu multiplu conex, simbolul*

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy \tag{4.73}$$

trebuie înţeles ca sumă de integrale curbilinii luate pe toate contururile care alcătuiesc frontiera domeniului, fiecare contur fiind parcurs în sensul în care un observator vede domeniul D^+ la stânga sa.

Observaţia 4.8.2 *Când s–a demonstrat formula integrală Rieman– Green s–a presupus că funcţiile P şi Q precum şi derivatele parţiale ale lor $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue nu numai în interiorul domeniului D^+ dar şi pe frontiera acestuia Γ^+. Se constată însă că este suficient ca aceste funcţii împreună cu derivatele menţionate să fie continue şi mărginite în interiorul lui D^+.*

Observaţia 4.8.3 *Având în vedere că la schimbarea sensului de parcurs al unei curbe integrala curbiline de speţa a doua schimbă de semn, rezultă că formula integrală Riemann–Green se poate scrie şi în forma*

$$\int_{\Gamma^-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = -\iint\limits_{D^+}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy. \tag{4.74}$$

Când nu se precizează orientarea domeniului de integrare şi nici a frontierei sale, formula integrală Riemann–Green trebuie scrisă astfel

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \pm\iint\limits_{D}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy, \tag{4.75}$$

urmând ca semnul din membrul al doilea să se stabilească în funcţie de orientarea domeniului de integrare a integralei duble în raport cu orientarea

frontierei: semnul plus corespunde când $D = D^+$ şi $\Gamma = \Gamma^+$; semnul minus se ia când D şi Γ au orientări diferite. Evident, este posibil să întâlnim formula integrală Riemann–Green şi sub forma

$$\oint_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \pm \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy, \qquad (4.76)$$

caz în care în membrul doi se alege semnul plus dacă $D = D^+$ sau semnul minus când D este negativ orientat.

Ca o aplicaţie a formulei integrale Riemann–Green să exprimăm aria S a unui domeniu plan simplu D, care ştim că se calculează cu integrala dublă

$$S = \int_D dxdy, \qquad (4.77)$$

cu ajutorul unei integrale curbilinii pe frontiera Γ a acestuia. Pentru aceasta să considerăm integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma^+} x\,dy. \qquad (4.78)$$

Aplicând formula integrală Riemann–Green, din (4.78) obţinem

$$\int_{\Gamma^+} x\,dy = \int_D dxdy = S. \qquad (4.79)$$

În mod asemător obţinem formula

$$S = -\int_{\Gamma^+} y\,dx. \qquad (4.80)$$

Combinând aceste formule deducem o altă formulă de calcul ariei unui domeniu plan simplu în care integrările în raport cu x şi y sunt implicate simetric:

$$S = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\,dy - y\,dx. \qquad (4.81)$$

Exemplul 4.8.1 *Să se calculeze aria domeniului plan simplu delimitat de* **astroida cu braţe egale** *de ecuaţii parametrice*

$$\begin{cases} x = a\,\cos^3 t, \\ y = a\,\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \qquad (4.82)$$

Soluţie. Aplicând formula (4.81) obţinem

$$S = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \tag{4.83}$$

■

Exemplul 4.8.2 *Folosind integrala curbilinie, să se calculeze aria domeniului plan limitat de elipsa de semiaxe a şi b.*

Soluţie. Dacă centrul de simetrie al elipsei se află în originea reperului Oxy din plan şi axele sale de simetrie coincid cu axele de coordonate ale reperului, atunci ecuaţia carteziană explicită a elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

O reprezentare parametrică a acestei elipsei C, orientată pozitiv, poate fi

$$C: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

unde parametrul t parcurge intervalul $[0, 2\pi]$.

Domeniul plan D, delimitat de elipsă, este simplu în raport cu ambele axe, deci pentru calculul ariei lui D putem aplica formula

$$2\text{Aria}(D) = \int_C xdy - ydx = ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 2\pi ab,$$

de unde deducem că aria elipsei este πab. ■

4.9 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Fie Ω un domeniu plan simplu conex situat în planul $O'uv$ având frontiera Γ' o curbă simplă închisă şi netedă pe porţiuni. Dacă

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in \Omega \tag{4.84}$$

este o transformare punctuală regulată (difeomorfism) de la planul $O'uv$ la planul xOy, atunci $D = T(\Omega) = \operatorname{Im} T$ este un domeniu simplu conex din planul xOy, iar curba $\Gamma = T(\Gamma')$ este o curbă simplă închisă, netedă pe porţiuni şi în plus $\partial D = \Gamma$.

Transformarea punctuală regulată T se numeşte *directă*, dacă un punct care se deplasează în sens invers acelor de ceasornic pe curba Γ' este transformat prin T, întrun punct care se deplasează pe Γ, tot în sensul invers acelor de ceasornic. Dacă cel de–al doilea sens de mişcare este cel al acelor de ceasornic, atunci transformarea punctuală regulată T se spune că este *indirectă* sau *inversă*.

Jacobianul transformării punctuale regulate T din (4.84) este funcţia reală nenulă $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$ ale cărei valori se determină după legea

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}. \tag{4.85}$$

Teorema 4.9.1 *Dacă funcţiile $\varphi : \Omega \to I\!R$ şi $\psi : \Omega \to I\!R$ care definesc difeomorfismul T sunt astfel încât admit derivate parţiale mixte de ordinul doi continue, iar jacobianul lui T este pozitiv pe Ω*

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) > 0, \quad (\forall)\ (u,v) \in \Omega, \tag{4.86}$$

atunci T este o transformare punctuală regulată directă.

Demonstraţie. Să presupunem că o reprezentare parametrică a curbei orientate Γ' este

$$\Gamma' : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{4.87}$$

Atunci, curba $\Gamma = T(\Gamma')$ va avea o reprezentare parametrică dată de

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi\big(u(t), v(t)\big), \\ y = \psi\big(u(t), v(t)\big), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{4.88}$$

Convenim ca sensul direct sau pozitiv de parcurs al curbei închise Γ să fie sensul imprimat de creşterrea parametrului t. Atunci, folosind un rezultat din

paragraful precedent şi formula de calcul a integralelor curbilinii de speţa a doua, deducem

$$\text{aria}\, D = \oint_{\Gamma} x\, dy = \int_a^b \varphi\Big(u(t), v(t)\Big)\, \frac{dy}{dt}(t)\, dt. \tag{4.89}$$

Însă

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial u}\Big(u(t), v(t)\Big)\, \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Big(u(t), v(t)\Big)\, \frac{dv}{dt}(t) \tag{4.90}$$

Înlocuind (4.90) în (4.89) găsim o altă exprimare a ariei lui D

$$\begin{aligned} \text{aria}\, D = \int_a^b \varphi\Big(u(t), v(t)\Big)\Big(\frac{\partial \psi}{\partial u}\Big(u(t), v(t)\Big)\, \frac{du}{dt}(t) + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Big(u(t), v(t)\Big)\, \frac{dv}{dt}(t)\Big) dt. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Integrala din membrul al doilea din (4.91) este de fapt o integrală curbilinie pe Γ', astfel că putem scrie

$$\text{aria}\, D = \int_{\Gamma'} \varphi(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\, du + \varphi(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\, dv. \tag{4.92}$$

Ultimei integrale îi aplicăm formula integrală Riemann–Green (4.75) adaptată la variabilele independente u şi v

$$\int_{\Gamma'} P(u,v)\, du + Q(u,v) dv = \pm \iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial Q}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u,v)\Big) du dv, \tag{4.93}$$

unde semnul plus corespunde sensului direct pe Γ', iar semnul minus corespunde sensului invers pe Γ'. Din relaţiile (4.92) deducem că funcţiile $P(u,v)$ şi $Q(u,v)$ din (4.93) au expresiile:

$$P(u,v) = \varphi(u,v)\, \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v); \quad Q(u,v) = \psi(u,v)\, \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \tag{4.94}$$

şi deci expresia integrantului din membrul al doilea a egalităţii (4.93) va fi

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, \frac{\partial \psi}{\partial v} + \varphi\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, \frac{\partial \psi}{\partial u} - \varphi\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}. \tag{4.95}$$

În baza criteriului lui Schwarz, derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte sunt egale şi deci (4.95) devine

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}. \tag{4.96}$$

În felul acesta, am obţinut egalitatea

$$\text{aria}\, D=\pm\iint\limits_{\Omega}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\,dudv. \tag{4.97}$$

Deoarece aria $D>0$, în faţa ultimei integrale trebuie luat semnul plus, adică în ultima integrală curbilinie pe curba închisă Γ' din şirul de egalităţi (4.92) trebuie luat sensul direct.

În mod asemănător se arată că dacă jacobianul transformării punctuale regulate T este negativ, atunci în cea de a doua integrală curbilinie din (4.92) trebuie luat sensul invers pe curba Γ'. ■

Observaţia 4.9.1 *Din demonstraţia teoremei precedente, rezultă că putem scrie egalitatea*

$$aria\, D=\iint\limits_{\Omega}\Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|\,dudv \tag{4.98}$$

indiferent dacă transformarea punctuală regulată T este directă sau inversă.

Funcţia de sub semnul integrală din (4.98), fiind continuă, putem aplica teorema de medie pentru integrala dublă, de unde rezultă existenţa unui punct $(u_0,v_0)\in\Omega$ astfel încât

$$\text{aria}\, D=\Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot \text{aria}\,\Omega. \tag{4.99}$$

Observaţia 4.9.2 *Egalitatea* (4.99) *are o analogie remarcabilă în cazul domeniilor unidimensionale. Dacă $f:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ este o funcţie Rolle cu derivata nenulă, atunci teorema creşterilor finite a lui Lagrange se poate transcrie în forma*

$$l([a,b])=|f'(\xi)|\cdot l([\alpha,\beta]), \tag{4.100}$$

unde $\xi\in(\alpha,\beta)$, $l([a,b])$ este lungimea intervalului $[a,b]$, iar $l([\alpha,\beta])=\beta-\alpha$ este lungimea intervalului $[\alpha,\beta]$. Egalitatea (4.100) *este analoaga unidimensională a egalităţii* (4.99).

Teorema 4.9.2 *Dacă T este transformarea punctuală regulată* (4.84) *şi f este o funcţie reală definită şi continuă pe D, atunci are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega} f\Big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\Big)\Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|\,dudv \qquad (4.101)$$

numită **formula schimbării de variabile în integrala dublă** *sau* **formula de transport**.

Demonstraţie. Existenţa integralelor din egalitatea (4.101) rezultă din faptul că funcţia f este continuă pe D, iar T este transformare punctuală regulată în $\mathbb{R}^2$. Fie acum

$$\Delta' = \{D'_1, D'_2, \cdots, D'_n\} \qquad (4.102)$$

o diviziune a oarecare a domeniului Ω pe care este definită transformarea punctuală regulată T. Această transformare punctuală regulată duce D'_i în domeniul $D_i \subset D$ astfel încât

$$\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\} \qquad (4.103)$$

este o diviziune a lui $D = T(\Omega)$.

Pentru fiecare domeniu D_i aplicăm formula (4.99). Rezultă în acest fel că pentru fiecare indice i cu valori de la 1 până la n putem scrie

$$\text{aria}\, D_i = \Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|_{(u_i,v_i)} \cdot \text{aria}\, D'_i. \qquad (4.104)$$

Formăm acum suma integrală Riemann a funcţiei f corespunzătoare modului de divizare Δ şi alegerii punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, unde

$$\xi_i = \varphi(u_i, v_i), \quad \eta_i = \psi(u_i, v_i). \qquad (4.105)$$

Avem

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria} D_i. \qquad (4.106)$$

Considerăm funcţia

$$F : \Omega \to D, \quad F(u,v) = f\Big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\Big)\Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|. \qquad (4.107)$$

Din (4.106) şi (4.107) deducem

$$\sigma_\Delta(f;\xi_i,\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} F(u_i,v_i)\cdot \text{aria}D'_i = \sigma_{\Delta'}(F;u_i,v_i). \tag{4.108}$$

Din (4.108) rezultă că suma integrală Riemann a funcţiei f relativă la modul de divizare Δ din (4.103), şi pentru alegerea (4.105) a punctelor intermediare, este egală cu o suma integrală Riemann a funcţiei F din (4.107), corespunzătoare modului arbitrar Δ' de divizare a lui Ω şi punctelor intermediare (u_i,v_i) care intră în relaţiile (4.104).

Fie $(\Delta'_k)_{k\geq 1}$ un şir de diviziuni ale lui Ω cu proprietatea $\nu(\Delta'_k)\to 0$. Din continuitatea lui T pe mulţime compactă Ω rezultă uniforma continuitate a sa şi i deci condiţia $\nu(\Delta'_k)\to 0$ implică $\nu(\Delta_k)\to 0$, unde Δ_k este diviziunea lui D corespunzătoare diviziunii Δ'_k a lui Ω. Atunci, pentru fiecare număr natural $k\geq 1$, putem scrie egalitatea

$$\sigma_{\Delta_k}(f;\xi_i^k,\eta_i^k) = \sigma_{\Delta'_k}(F;u_i^k,v_i^k). \tag{4.109}$$

Din existenţa celor două integrale care intră în (4.101) şi prin trecerea la limită în relaţia (4.109), obţinem formula de transport (4.101) şi teorema este demonstrată. ∎

Observaţia 4.9.3 *Formula schimbării de variabilă în integrala dublă se aplică ori de câte ori integrala dublă din membrul al doilea al relaţiei* (4.101) *este mai simplă decât cea din membrul întâi.*

Observaţia 4.9.4 *Schimbarea de variabile* (4.84) *se alege astfel încât să se simplifice fie domeniul de integrare, fie funcţia de integrat, fie ambele. Alegerea schimbării de variabile este sugerată de integrala din membrul stâng al egalităţii* (4.101).

Exemplul 4.9.1 *Să se calculeze aria domeniului plan D mărginit de curbele:*

$$\begin{aligned} &xy=a; \quad xy=b; \quad b>a>0\\ &y=\alpha x; \quad y=\beta x, \quad \beta>\alpha>0, \end{aligned} \tag{4.110}$$

situat în primul cadran al sistemului de coordonate xOy.

Soluţie. Aria domeniului D, calculată cu ajutorul integralei duble, este

$$\text{aria}\, D = \iint\limits_D dxdy. \tag{4.111}$$

Dacă scriem domeniul D în forma

$$D = \{(x,y) \in I\!\!R^2 : \; a \leq x\, y \leq b\,; \; \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta\}, \tag{4.112}$$

atunci pentru calculul integralei duble ni se sugerează transformarea punctuală

$$T^{-1} : \; \begin{cases} u = x\, y, \\ v = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b] \times [\alpha, \beta], \quad (x,y) \in D, \tag{4.113}$$

care se vede că este inversa transformării punctuale

$$T \; : \; \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b] \times [\alpha, \beta], \quad (x,y) \in D. \tag{4.114}$$

Ambele transformări punctuale sunt regulate, iar difeomorfismul T transformă intervalul bidimensional $\Omega = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ în domeniul D. Cum T şi T^{-1} sunt transformări punctuale regulate inverse una alteia rezultă

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & -\dfrac{y}{x^2} \\ x & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\dfrac{y}{x}} = \frac{1}{2v}. \tag{4.115}$$

Deci aria căutată va fi

$$\text{aria}\, D = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_\Omega \frac{dudv}{v} = \frac{1}{2} \int_a^b du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v} = \frac{b-a}{2} \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.116}$$

■

Trecerea la coordonate polare este una dintre cele mai des utilizate schimbări de variabile şi este definită de transformarea

$$T \; : \; \begin{cases} x = \rho\, \cos\theta, \\ y = \rho\, \sin\theta, \end{cases} \tag{4.117}$$

unde $(\rho, \theta) \in \Omega \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ şi $(x, y) \in D$.

Se constată simplu că transformarea (4.117) este o transformare punctuală regulată, iar

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\,\sin\theta & \rho\,\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \tag{4.118}$$

care este pozitiv în toate punctele din interiorul lui Ω.

Formula schimbării de variabile în integrala dublă când se trece de la coordonatele carteziene la variabilele polare date de relaţiile (4.117) este

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega f\Big(\rho\,\cos\theta, \rho\,\sin\theta\Big)\,\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{4.119}$$

Exemplul 4.9.2 *Să se calculeze integrala dublă*

$$I(R) = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy, \tag{4.120}$$

unde D este discul închis cu centrul în origine de rază R. Folosind rezultatul stabilit să se arate că

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.121}$$

Soluţie. Pentru calculul integralei duble efectuăm schimbarea de variabile (4.117). Se vede imediat că Ω este intervalul bidimensional $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi)$. Aplicând formula (4.119), obţinem

$$I(R) = \iint\limits_\Omega \rho\,e^{-\rho^2}d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\,e^{-\rho^2}\,d\rho = \pi(1 - e^{-\rho^2}). \tag{4.122}$$

Din acest rezultat, prin trecere la limită pentru $R \to +\infty$, găsim

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi. \tag{4.123}$$

Să considerăm acum intervalul bidimensional închis $\Omega = [-a, a] \times [-a, a]$, cu $a > 0$, şi integrala dublă

$$J(a) = \iint\limits_\Omega e^{-x^2-y^2}dxdy. \tag{4.124}$$

Evident, Ω este intervalul bidimensional cu laturile egale cu $2a$ şi cu centrul de simetrie în originea reperului xOy. Avem

$$J(a) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}dy = \Big(\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt\Big)^2 = \Big(2\int_{0}^{a} e^{-t^2}dt\Big)^2. \quad (4.125)$$

Trecând la limită pentru $a \to +\infty$ în egalitatea

$$J(a) = \Big(2\int_{0}^{a} e^{-t^2}dt\Big)^2, \quad (4.126)$$

obţinem o altă evaluare a integralei duble pe întreg planul din funcţia $e^{-x^2-y^2}$ care, în analogie cu integralele improprii, putem să o numim *integrală dublă improprie*. După trecerea la limită, găsim

$$\iint\limits_{I\!R^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = 4\Big(\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dt\Big)^2. \quad (4.127)$$

Din (4.123) şi (4.127) deducem (4.121), rezultat utilizat în teoria probabilităţilor. ■

4.10 Aplicaţii ale integralei duble în mecanică şi geometrie

4.10.1 Masa şi centrul de greutate ale unei plăci

Considerăm că întrun plan s–a ales reperul cartezian xOy şi considerăm în acesta domenii simple despre care se ştie că sunt mulţimi carabile.

Definiţia 4.10.1 *Se numeşte* **placă materială** *în planul* xOy *ansamblul* $\mathcal{P}$ *dintre un domeniu simplu* $D \subset I\!R^2$ *şi funcţia reală* ρ *definită şi continuă pe* D. *Mulţimea* D *se numeşte* **configuraţia plăcii** *iar funcţia* ρ *este denumită* **densitatea** *de distribuţie a materiei în placă. Placa materială se numeşte* **omogenă** *dacă* ρ *este funcţia constantă pe* D *şi* **neomogenă** *când densitatea acesteia este variabilă de la punct la punct.*

Observaţia 4.10.1 *Dacă placa* $\mathcal{P}$ *este omogenă şi are densitatea egală cu constanta* ρ_0, *atunci masa* $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ *a acesteia este produsul dintre densitatea constantă* ρ_0 *şi aria domeniului* D, *deci*

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \rho_0 \cdot aria\, D. \quad (4.128)$$

Să determinăm masa unei plăci materiale neomogene $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$. Pentru aceasta, să efectuăm o divizare a domeniului D şi în fiecare parte componentă D_i a diviziunii alegem un punct de coordonate (ξ_i, η_i). Masa fiecărei plăci componente $\mathcal{P}_i = \{D_i; \rho\}$ poate fi aproximată cu masa plăcii omogene care are configuraţia D_i şi densitatea constantă egală cu $\rho(\xi_i, \eta_i)$. Atunci, o valoare aproximativă a masei întregii plăci poate fi

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}\,D_i. \tag{4.129}$$

Pentru a obţine masa exactă a plăcii materiale este necesar să trecem la limită, pentru norma divizării lui D tinzând la zero, în suma integrală Riemann din (4.129). Deoarece ρ este funcţie continuă, iar D este un domeniu simplu rezultă că în locul lui (4.129) vom avea

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \iint\limits_D dm, \tag{4.130}$$

unde

$$dm = \rho(x,y)dxdy \tag{4.131}$$

se numeşte **element de masă** al plăcii.

Să determinăm coordonatele centrului de greutate a plăcii $\mathcal{P}$. Pentru aceasta, divizăm iarăşi domeniul D cu ajutorul divizării Δ care constă din domeniile $D_1,\ D_2, \cdots, D_n$, alegem în fiecare domeniu component punctul $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ şi notăm:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n); \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n).$$

Considerînd că porţiunea D_i din placă este una omogenă cu densitatea constantă şi egală cu $\rho(\xi_i, \eta_i)$, masa m_i a acestei plăci omogene va fi

$$m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}\,D_i. \tag{4.132}$$

Gândind aproximativ, putem asimila placa $\mathcal{P}$ cu sistemul de puncte materiale

$$M_1, M_2, \ldots, M_n$$

care au respectiv ponderile $m_1,\ m_2, \cdots, m_n$. Atunci, putem scrie expresiile bine cunoscute ale coordonatelor $x_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ şi $y_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ ale centrului de

greutate al unui sistem de puncte materiale:

$$x_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,\rho(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i};\quad y_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,\rho(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i}. \tag{4.133}$$

Pentru a obţine valorile exacte ale coordonatelor centrului de greutate a plăcii $\mathcal{P}$, trebuie să trecem la limită în relaţiile (4.133) când norma divizării Δ tinde la zero. Numitorii expresiilor din membrul drept al egalităţilor (4.133) sunt egali cu suma Riemann a funcţiei ρ corespunzătoare divizării Δ şi alegerii $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ a punctelor intermediare. Numărătorul primei expresii de mai sus este suma integrală Riemann $\sigma_\Delta(x\,\rho;\xi_i,\eta_i)$, iar cel de al doilea numărător este $\sigma_\Delta(y\,\rho;\xi_i,\eta_i)$. Deoarece funcţiile $\rho(x,y)$, $x\,\rho(x,y)$ şi $y\,\rho(x,y)$ sunt continue, aceste expresii au limită pentru $\nu(\Delta)\to 0$ şi aceste limite sunt integralele duble ale funcţiilor de mai sus pe domeniul Δ. Notând cu x_G şi y_G valorile exacte ale coordonatelor centrului de greutate al plăcii, avem:

$$x_G=\lim_{\nu(\Delta)\to 0}x_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta});\quad y_G=\lim_{\nu(\Delta)\to 0}y_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{4.134}$$

După trecerea la limită şi folosirea relaţiilor (4.130), (4.131) şi (4.134) deducem că expresiile coordonatelor centrului de greutate G al plăcii $\mathcal{P}$ sunt

$$x_G=\frac{1}{\mathcal{M}(\mathcal{P})}\iint_D x\,dm;\quad y_G=\frac{1}{\mathcal{M}(\mathcal{P})}\iint_D y\,dm. \tag{4.135}$$

Dacă placa materială este omogenă, formulele pentru coordonatele centrului de greutate se simplifică şi devin

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\displaystyle\iint_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy} = \dfrac{1}{\text{aria}\,D}\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\\[2ex] y_G = \dfrac{\displaystyle\iint_D y\,dm}{\displaystyle\iint_D dxdy} = \dfrac{1}{\text{aria}\,D}\displaystyle\iint_D y\,dxdy. \end{cases} \tag{4.136}$$

Exemplul 4.10.1 *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$, cu densitatea constantă şi egală cu unitatea, unde*

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \leq a^2, \ x^2 + y^2 \geq ax, \ y \geq 0\}, \ (a > 0). \quad (4.137)$$

Soluţie. Configuraţia plăcii $\mathcal{P}$ este domeniul plan închis D inclus în semiplanul superior a cărui frontieră se compune din: semicercul superior al cercului cu centrul în origine şi raza egală cu a; segmentul de dreaptă de pe Ox cu abscisele $-a \leq x \leq 0$; semicercul superior al cercului cu centrul în punctul $(a/2, 0)$ şi rază $a/2$.

Prin trecerea la coordonate polare

$$T : \ x = \rho \cos\theta, \ y = \rho \sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \rho \geq 0 \quad (4.138)$$

domeniul D se transformă în domeniul $\Omega = D_1' \cup D_2'$ unde:

$$D_1' = \{(\rho, \theta) : \ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \ \ a \cos\theta \leq \rho \leq a\}; \quad (4.139)$$

$$D_2' = \{(\rho, \theta) : \ \ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \ \ 0 \leq \rho \leq a\}. \quad (4.140)$$

Observăm că domeniul D_1' este transformatul prin T din (4.138) a porţiunii D_1 a lui D aflată în primul cadran al reperului xOy, D_2' este transformatul părţii D_2 a lui D situată în cadranul al doilea şi $D = D_1 \cup D_2$.

Pentru calculul integralelor duble care urmează vom efectua schimbarea de variabile (4.138).

Placa $\mathcal{P}$ fiind omogenă, are masa $\mathcal{M}$ dată de integrala dublă

$$\mathcal{M} = \iint\limits_{D} dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} \rho\, d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} \rho\, d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (a^2 - a^2 \cos^2\theta)\, d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2\, d\theta = \frac{3\pi\, a^2}{8}.$$

Coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ sunt

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D x\,dx\,dy = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_\Omega \rho^2\, \cos\theta\, d\rho d\theta =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} \rho^2\, d\rho +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\theta) \cos\theta\, d\theta + \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta = -\frac{a}{6},$$

$$y_G = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega \rho^2\, \sin\theta\, d\rho d\theta = \iint\limits_{D_1'} \rho^2\, \sin\theta\, d\rho d\theta =$$

$$\iint\limits_{D_2'} \rho^2\, \sin\theta\, d\rho d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} \rho^2\, d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\theta) \sin\theta\, d\theta + \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{14\,a}{9\pi}.$$

Prin urmare, centrul de greutate al plăcii consideratere coordonatele $(-a/6, 14\,a/(9\pi))$. ■

4.10.2 Momente de inerţie ale unei plăci

După cum bine se ştie, momentul de inerţie al unui punct material de pondere m faţă de un element geometric, care în plan poate fi o dreaptă sau un punct, este egal cu produsul dintre masa acestuia şi pătratul distanţei dintre punctul material şi acel element. Momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale faţă de un element geometric este suma momentelor fiecărui punct material în parte faţă de acelaşi element geometric.

Să determinăm momentele de inerţie ale plăcii $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$ faţă de elementele reperului cartezian xOy, adică faţă de axele sale şi faţă de originea O.

În acest scop divizăm din nou placa $\mathcal{P}$ în plăcile componente $\mathcal{P}_i = \{D_i, \rho\}$, unde $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ este o divizare a lui D, apoi fiecare dintre

aceste plăci o considerăm placă omogenă cu densitatea egală cu $\rho(\xi_i, \eta_i)$, unde $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, după care putem aproxima placa $\mathcal{P}_i$ cu punctul material M_i având ponderea m_i dată în (4.132). Momentele de inerţie ale acestui sistem de puncte materiale faţă de axele de coordonate Ox, Oy, conform celor stabilite mai sus, sunt

$$\begin{aligned} I_x(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2\, m_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria}\, D_i, \\ I_y(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\, m_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\, \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria}\, D_i. \end{aligned} \tag{4.141}$$

Observăm că

$$I_x(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sigma_\Delta(y^2\rho; \xi_i, \eta_i), \quad I_y(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sigma_\Delta(x^2\rho; \xi_i, \eta_i).$$

Momentul de inerţie al aceluiaşi sistem de puncte materiale faţă de originea O a reperului este

$$\begin{aligned} I_O(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} (\xi^2 + \eta_i^2) m_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i)\, \text{aria}\, D_i = \\ &= \sigma_\Delta((x^2 + y^2)\rho; \xi_i, \eta_i). \end{aligned} \tag{4.142}$$

Trecând la limită în (4.141) şi (4.142) când norma diviziării Δ tinde la zero şi ţinând cont că funcţiile $y^2\rho(x, y)$, $x^2\rho(x, y)$ şi $(x^2 + y^2)\rho(x, y)$ sunt continue pe D, deci integrabile, constatăm că limitele din membrul doi există şi sunt integralele duble pe D din funcţiile indicate. Prin urmare, există şi limitele din membrul întâi ale relaţiilor (4.141) şi (4.142), pe care le notăm cu I_x, I_y şi I_O şi care sunt momentele de inerţie faţă de respectiv axele de coordonate şi faţă de originea reperului. Avem

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D y^2 dm, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D x^2 dm,$$
$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dm.$$

Se observă că are loc relaţia

$$I_O = I_x + I_y. \tag{4.143}$$

Exemplul 4.10.2 *Să se determine momentele de inerţie ale plăcii* $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ *în raport cu elementele reperului de coordonate* xOy, *unde*

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \;\; x + y \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0\} \tag{4.144}$$

şi densitatea este $\rho(x, y) = xy$.

Soluţie. Configuraţia plăcii $\mathcal{P}$ este domeniul închis D având frontiera triunghiul isoscel dreptunghic cu catetele de lungime 1 situate pe axele de coordonate în porţiunea lor pozitivă. Rezultă că D este simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Prezentându–l ca domeniu simplu în raport cu Ox şi respectiv în raport cu Oy, avem

$$D = D_x = \{(x, y) \in I\!R^2 : \; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq 1 - y\}; \tag{4.145}$$

$$D = D_y = \{(x, y) \in I\!R^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1 - x\}. \tag{4.146}$$

În calculul momentului de inerţie I_x, în raport cu axa Ox, vom considera că D are forma (4.145), iar pentru calculul lui I_y vom lua pe D sub forma (4.146). Deci:

$$I_x = \iint\limits_{D_x} y^2 \, \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} x y^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y^2) y^3 \, dy = \frac{1}{120};$$

$$I_y = \iint\limits_{D_y} x^2 \, \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) x^3 dx = \frac{1}{120}.$$

Aşadar, momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate sunt egale, iar cel în raport cu originea reperului, I_O, este suma $I_O = I_x + I_y = \dfrac{1}{60}$. ■

4.10.3 Momente statice ale unei plăci

Momentele statice M_x şi M_y ale plăcii materiale $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ în raport cu axele de coordonate Ox şi Oy, se exprimă prin formulele

$$M_x = \iint\limits_{D} y \, \rho(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint\limits_{D} x \, \rho(x, y) dx dy. \tag{4.147}$$

Exemplul 4.10.3 *Să se calculeze momentele statice în raport cu axele de coordonate ale plăcii $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$, mărginită de dreapta $x + y = 2$ şi de parabola $y = x^2$ ştiind că densitatea este $\rho(x, y) = y$.*

Soluţie. Domeniul D este simplu în raport cu Oy căci poate fi definit de inegalităţile

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 2 - x. \tag{4.148}$$

Aplicând formulele (4.147) de calcul ale momentelor statice şi ţinând cont de inegalităţile (4.148), avem:

$$\begin{aligned} M_x =& \iint\limits_D y\,\rho(x,y)dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y^2\,dy = \\ =& \frac{1}{3}\int_{-2}^{1}\Big((2-x)^3 - x^6\Big)dx = -\frac{1}{3}\Big(\frac{(x-2)^4}{4} + \frac{x^7}{7}\Big)\Big|_{-2}^{1} = \frac{423}{28}; \end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned} M_y =& \iint\limits_D x\,\rho(x,y)dxdy = \int_{-2}^{1} x\,dx \int_{x^2}^{2-x} y\,dy = \\ =& \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} x\Big((2-x)^2 - x^4\Big)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x^3 - 4x^2 + 4x - x^5)dx = \\ =& \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 - \frac{x^6}{6}\Big)\Big|_{-2}^{1} = -\frac{45}{8}. \end{aligned} \tag{4.150}$$

În cazul în care D s–ar considera domeniu simplu în raport cu Ox, volumul de calcul al integralelor duble pe $D = D_x$ este mai mare deoarece trebuie să scriem D_x ca o reuniune de două domenii, ambele simple în raport cu Ox. ■

4.10.4 Flux luminos incident pe o placă

Considerăm că placa $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$ este situată în planul xOy a reperului spaţial $Oxyz$ şi că în punctul $(0, 0, z_0)$ de pa axa Oz se află o sursă luminoasă de intensitate constantă în toate direcţiile notată cu I. Ne propunem să calculăm fluxul luminos incident pe placa $\mathcal{P}$.

Fluxul luminos dF primit de placa elementară de arie ds este egal cu $I\,d\omega$, unde $d\omega$ este *unghiul solid* în punctul $(0, 0, z_0)$ subântins de elementul de suprafaţă $ds = dxdy$ asociat punctului plăcii de coordonate (x, y). Unghiul solid $d\omega$ este egal cu produsul raportului dintre aria ds a elementului de

suprafaţă şi pătratul distanţei de la acest element la sursa de lumină, şi cosinusul unghiului φ dintre normala la elementul de suprafaţă şi direcţia spre care se află sursa. Avem evident

$$\cos\varphi = \frac{z_0}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}. \tag{4.151}$$

Valoarea derivatei $\dfrac{dF}{ds}$ în punctul (x,y) al plăcii este cunoscută ca *intensitatea de luminozitate* în acest punct şi este notată cu $A(x,y)$. Rezultă că

$$A(x,y) = \frac{dF}{ds} = \frac{I\,d\omega}{ds} = \frac{I z_0}{\left(x^2+y^2+z_0^2\right)^{3/2}}. \tag{4.152}$$

Procedând similar ca în cazul determinării masei plăcii constatăm că fluxul luminos total F primit de placă este integrala dublă pe D din funcţia $A(x,y)$

$$F = \iint\limits_D A(x,y)dxdy = I z_0 \iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2+z_0^2\right)^{3/2}}. \tag{4.153}$$

4.10.5 Debitul unui fluid prin secţiunea transversală a unui canal

Considerăm un fluid care curge întrun canal şi o secţiune transversală a sa D, perpendiculară pe direcţia de curgere a fluidului. Introducând sistemul de coordonate cartezian xOy în planul secţiunii transversale, putem privi viteza V a fluidului, în fiecare punct al secţiunii, ca fiind o funcţie de x şi y, coordonatele carteziene ale acelui punct.

Ne propunem să determinăm cantitatea de fluid care trece prin secţiune în unitatea de timp.

În acest scop, în punctul (x,y) al secţiunii transversale considerăm un element inmfinitezimal ds al acesteia de arie $dxdy$. Cantitatea de fluid care străbate elementul de plan ds în unitatea de timp este egală evident cu masa unui cilindru elementar, care conţine fluid, cu baza egală cu ds şi înălţimea egală cu viteza fluidului în punctul (x,y) al secţiunii transversale. Aşadar, *debitul elementar* dQ al fluidului este

$$dQ = \rho(x,y)V(x,y)dxdy, \tag{4.154}$$

unde $\rho(x, y)$ este densitatea fluidului în punctul (x, y). Pentru a găsi debitul $Q(D)$ prin secţiunea D ar trebui să sumăm toate debitele elementare, sumare care conduce la integrala dublă pe domeniul D din funcţia ρV. Prin urmare,

$$Q(D) = \iint_D \rho(x, y)V(x, y)dxdy. \tag{4.155}$$

4.10.6 Volumul unui cilindroid

Definiţia 4.10.2 *Fie D un domeniu simplu aflat în planul xOy al reperului cartezian spaţial $Oxyz$ şi $f : D \to I\!R^+$ o funcţie reală, de două variabile reale, pozitivă şi continuă pe D. Se numeşte* **cilindroid** *mulţimea $\mathcal{C}$ a punctelor din spaţiu definită prin*

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D; \ 0 \le z \le f(x, y)\}. \tag{4.156}$$

Mulţimile D şi $\mathcal{B}_s = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D; \ z = f(x, y)\}$ sunt prin definiţie **bazele** *cilindroidului.*

Dacă considerăm o divizare $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ a domeniului D şi în fiecare domeniu component D_i al acesteia alegem un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, atunci putem considera corpurile prismatice Π_i

$$\Pi_i = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D_i; \ 0 \le z \le f(\xi_i, \eta_i)\} \tag{4.157}$$

care are baza D_i şi înălţimea h_i egală cu valoarea funcţiei f în punctul (ξ_i, η_i). Volumul $\mathcal{V}(\Pi_i)$ a unui asemenea corp prismatic este

$$\mathcal{V}(\Pi_i) = f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}\, D_i. \tag{4.158}$$

Suma

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\Pi_i) \tag{4.159}$$

reprezintă o valoare aproximativă a volumului cilindroidului $\mathcal{C}$. O aproximare mai bună a volumului cilindroidului se va obţine dacă se va considera o diviziune Δ' mai fină decât diviziunea Δ. Mai mult, analiză modului de abordare a celorlalte aplicaţii ale integralei duble conduce la observaţia următoare.

Observaţia 4.10.2 *Valoarea exactă a volumului cilindroidului va fi limita sumei din* (4.159) *când norma divizării Δ tinde la zero, în cazul în care această limită există.*

Din (4.158) şi (4.159) constatăm că valoarea aproximativă a volumului $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ al cilindroidului $\mathcal{C}$ este suma integrală Riemann a funcţiei f corespunzătoare modulului de divizare Δ şi alegerii (ξ_i, η_i) a punctelor intermediare

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}\, D_i = \sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i). \tag{4.160}$$

Din Observaţia 4.10.2, relaţia (4.160) şi din faptul că f este funcţie continuă deducem formula de calcul a volumului cilindroidului $\mathcal{C}$

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{4.161}$$

Observaţia 4.10.3 *Funcţia continuă f din Definiţia 4.10.2 poate avea şi valori negative, noţiunea de cilindroid păstrându–şi sensul, acesta fiind o reunine de mulţimi de forma (4.156) în acele subdomenii ale lui D unde f are valori pozitive şi de mulţimi de forma*

$$\mathcal{C}_- = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D_-; \ f(x, y) \leq z \leq 0\} \tag{4.162}$$

în acele părţi D_- a lui D unde funcţia f are valori negative.

Cu alte cuvinte întrun astfel de cilindroid baza $\mathcal{B}_s$ este o reuniune de porţiuni de suprafeţe situate atât în semispaţiul superior $z > 0$ cât şi în semispaţiul inferior $z < 0$.

Înălţimea corpului prismatic ataşat porţiunii de cilindroid (4.162) va fi

$$h_i = -\, f(\xi_i, \eta_i) = |f(\xi_i, \eta_i)|, \tag{4.163}$$

iar o valoare aproximativă a volumului întregului cilindroid este

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i, \eta_i)| \cdot \text{aria}\, D_i = \sigma_\Delta(|f|; \xi_i, \eta_i), \tag{4.164}$$

unde $|f|$ este funcţia valoare absolută a funcţiei f.

În acest mod, constatăm că volumul unui cilindroid cu o bază domeniul simplu $D \subset xOy$, iar cealaltă bază având porţiuni atât în semispaţiul $z > 0$ cât şi în semispaţiul $z < 0$, este dat de integrala dublă

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D |f|(x, y)dxdy = \iint_D |f(x, y)|\, dxdy. \tag{4.165}$$

Exemplul 4.10.4 *Să se determine volumul corpului ale cărui puncte au coordonatele* (x, y, z) *care satisfac inegalităţile*

$$hz \geq x^2 + y^2, \;\; 0 \leq z \leq h. \tag{4.166}$$

Soluţie. Corpul căruia trebuie sa–i determinăm volumul este complementara cilindroidului $\mathcal{C}_2$ faţă de cilindroidul $\mathcal{C}_1$. Aceşti doi cilindroizi au aceeaşi bază, situată în planul xOy, şi anume discul închis cu centrul în origine de rază h

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \;\; x^2 + y^2 \leq h^2\}. \tag{4.167}$$

Cilindroidul $\mathcal{C}_1$ are *baza superioară* discul închis de rază h cu centrul în punctul $M_0(0, 0, h)$ situat în planul paralel cu planul xOy care trece prin M_0, plan care are ecuaţia $z = h$, în timp ce cilindroidul $\mathcal{C}_2$ are baza superioară o porţiune din paraboloidul de revoluţie de ecuaţie $z = \dfrac{1}{h}(x^2 + y^2)$. Atunci, volumul $\mathcal{V}$ al corpului considerat în enunţ este

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{C}_1) - \mathcal{V}(\mathcal{C}_2) = & \iint\limits_D h\, dxdy - \iint\limits_D \frac{1}{h}(x^2 + y^2)dxdy = \\ & = h \cdot \text{aria}\, D - \frac{1}{h} \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy. \end{aligned} \tag{4.168}$$

Observăm că valoarea ultimei integrale se poate determina foarte simplu dacă se trece la coordonate polare

$$x = \rho\, \cos\theta, \quad y = \rho\, \sin\theta.$$

Pentru ca $(x, y) \in D$ trebuie ca punctul de coordonate (ρ, θ) să se afle în intervalul bidimensional $\Delta = [0, h] \times [0, 2\pi)$. Aplicând formula schimbării de variabile, găsim

$$\begin{aligned} \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = & \iint\limits_\Delta \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\theta = \\ = & \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^3\, d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^h = \frac{\pi\, h^4}{2}. \end{aligned}$$

Ţinând cont că aria $D = \pi\, h^2$ şi folosind rezultatele determinate mai sus constatăm că volumul corpului din enunţ este

$$\mathcal{V} = \pi\, h^3 - \frac{\pi\, h^3}{2} = \frac{\pi\, h^3}{2},$$

rezultat care arată că volumul corpului este acelaşi cu volumul cilindroidului $\mathcal{C}_2$. ■

Exemplul 4.10.5 *Să se calculeze volumul cilindroidului cu baza superioară pe suprafaţa de ecuaţie*

$$z = x^2 + y^2,$$

iar baza inferioară, inclusă în planul xOy, *domeniul compact*

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \geq x, \ x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

Soluţie. Volumul cilindroidului este

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Trecând la coordonate polare

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta \tag{4.169}$$

se constată că punctul $(x, y) \in D$ dacă $(\rho, \theta) \in \Omega$, unde

$$\Omega = \{(\rho, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \ \cos\theta \leq \rho \leq 2\cos\theta\}.$$

Aplicând formula schimbării de variabilă în integrala dublă, găsim:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \rho^3 \, d\rho = \frac{15}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{45}{32}\pi.$$

■

Exemplul 4.10.6 *Folosind integrala dublă, să se determine volumul* V *al corpului mărginit de suprafeţele:*

$$z = 6 - x^2 - y^2; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soluţie. Pentru a evalua volumul corpului dat, calculăm volumele a doi cilindroizi, primul cu baza superioară pe suprafaţa $z = 6 - x^2 - y^2$, iar cel de al doilea cu baza superioară pe suprafaţa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ambii având aceeaşi bază inferioară, în planul xOy, definită de domeniul

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Volumul V este diferenţa volumelor celor doi cilindroizi. Avem:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}_1) = \iint\limits_D (6 - x^2 - y^2)dxdy; \quad \mathcal{V}(\mathcal{C}_2) = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy.$$

Ambele integrale se calculează trecând la coordonatele polare (4.169) şi se găseşte în final că $V = \dfrac{32\pi}{3}$. ■

4.11 Integrale duble improprii

4.11.1 Domeniul de integrare nu este mărginit

Definiţia 4.11.1 *Se spune că un domeniu plan D este* **nemărginit** *dacă el conţine puncte exterioare oricărui interval bidimensional închis şi mărginit, sau echivalent, oricărui disc închis.*

Vom presupune că orice parte mărginită a frontierei lui D este o curbă netedă sau netedă pe porţiuni. Un astfel de domeniu poate fi

- exteriorul unui domeniu mărginit sau a unui număr finit de domenii mărginite;
- porţiunea din plan limitată de o curbă de măsură Jordan nulă, care se întinde indefinit în ambele sensuri.

Să considerăm un şir infinit de discuri închise

$$K_1, \quad K_2, \quad \cdots, K_n, \cdots$$

cu centrul întrun punct oarecare C al planului raportat la reperul cartezian ortogonal Oxy şi drept raze termenii şirului arbitrar strict crescător de numere pozitive

$$R_1, \quad R_2, \cdots, R_n, \cdots$$

cu limita egală cu infinit. Fiecare din aceste discuri poate avea puncte comune cu un domeniu nemărginit dat D. Să notăm cu DK_n intersecţia mulţimilor D şi K_n. Orice punct $P \in D$ va fi conţinut, pentru n suficient de mare, în mulţimea corespunzătoare DK_n. Într-adevăr, este suficient să luăm pe n astfel încât să avem $R_n > d(P, C)$, unde $d(P, C)$ este distanţa euclidiană între punctele P şi O ale planului. Acest lucru este posibil întotdeauna

deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = +\infty$. Proprietatea de mai sus poate fi exprimată echivalent spunând că şirul de mulţimi

$$DK_1, \quad DK_2, \quad \cdots, DK_n, \cdots$$

tinde către domeniul D şi vom scrie, convenţional

$$\lim_{n\to+\infty} DK_n = D.$$

În această situaţie se spune că domeniul nemărginit D admite o *exhaustiune.*

Definiţia 4.11.2 *Fie D o mulţime nemărginită din plan. Spunem că D admite o* **exhaustiune** *dacă există un şir (D_n) de mulţimi din plan, compacte, măsurabile Jordan astfel încât:*

- *şirul (D_n) este ascendent faţă de operaţia de incluziune, adică $D_n \subset D_{n+1}$ şi $\cup_{n=1}^{+\infty} D_n = D$;*
- *orice mulţime compactă inclusă în D este conţinută întrun D_n.*

Pentru cele ce vor urma, este util să dăm definiţia noţiunii de secţiune a unui domeniu nemărginit.

Definiţia 4.11.3 *Vom spune că un domeniu D' constituie o* **secţiune** *a domeniului nemărginit D, dacă există un disc închis K cu centrul în origine, conţinând o porţiune din D şi astfel încât să avem*

$$DK \subset D' \subset D.$$

Elementele unei exhaustiuni a domeniului nemărginit D constituie, cel puţin de la un anumit rang, secţiuni ale lui D.

Teorema 4.11.1 *Din orice şir (D_n) de secţiuni ale domeniului nemărginit D, tinzând către D, se poate extrage un subşir (D_{k_n}), astfel încât*

$$D_{k_1} \subset D_{k_2} \subset \cdots \subset D_{k_n} \subset \cdots$$

şi

$$\lim_{n\to+\infty} D_{k_n} = D.$$

Demonstraţie. Luăm $k_1 = 1$ şi fie K_1 un disc închis care să conţină domeniul D_1. Vom nota D_{k_2}, primul domeniu din şirul

$$D_2, D_3, \cdots,$$

pentru care $DK_1 \subset D_{k_2}$. Fie K_2 un disc închis care să conţină pe D_{k_2}. Vom numi D_{k_3}, primul domeniu din şirul care începe cu D_{k_2}, şi pentru care $DK_2 \subset D_{k_3}$. Continuând, obţinem un şir de secţiuni ale lui D care îndeplineşte condiţia cerută. ■

Definiţia 4.11.4 *Vom numi* **şir crescător de domenii** *orice şir de mulţimi în care fiecare domeniu este conţinut în următorul.*

Definiţia 4.11.5 *Fie f o funcţie reală definită pe un domeniu nemărginit $D \subset I\!R^2$ şi integrabilă pe orice subdomeniu compact care are arie, a lui D. Spunem că f este* **integrabilă** *pe D, dacă există un număr real $J(D)$, astfel încât pentru orice exhaustiune (D_n) a lui D să avem*

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = J(D)$$

şi vom scrie

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = J(D).$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este *convergentă* pe mulţimea D.

Unei integrale duble pe un domeniu nemărginit i se poate spune *integrală improprie.*

Exemplul 4.11.1 *Funcţia $f(x,y) = x^2y$ nu este integrabilă pe mulţimea $D = I\!R^2$.*

Într-adevăr, dacă considerăm exhaustiunea (D_n) a mulţimii $I\!R^2$, unde

$$D_n = \{(x,y) \in I\!R^2 \;:\; x^2 + y^2 \le n^2\},$$

iar n este un număr întreg pozitiv, atunci

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_n} x^2ydxdy = \int_0^n d\rho \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin\theta\cos^2\theta d\theta = 0.$$

Pe de altă parte, dacă considerăm exhaustiunea (D'_n) a lui $I\!R^2$, unde D'_n este intervalul bidimensional închis $[-n, 2n] \times [-n, 2n]$, se vede imediat că

$$\iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy = \int_{-n}^{2n} x^2 dx \cdot \int_{-n}^{2n} y dy = \frac{7n^5}{2},$$

deci $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy = 0.$

Din Definiţia 4.11.5 rezultă că funcţia $f(x,y) = x^2 y$ nu este integrabilă pe $I\!R^2$ sau că integrala improprie $\iint\limits_{I\!R^2} f(x,y)dxdy$ este *divergentă*. ■

Teorema 4.11.2 *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca f să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca oricărui număr pozitiv ε să –i corespundă o secţiune $\overline{D} = \overline{D}(\varepsilon)$, astfel încât, pentru orice pereche de secţiuni D', D'', verificând relaţiile*

$$\overline{D} \subset D', \;\; \overline{D}'' \subset D",$$

să avem

$$\Big| \iint\limits_{D"} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \Big| < \varepsilon. \tag{4.170}$$

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Într-adevăr, să presupunem funcţia f integrabilă pe D şi să notăm cu $J(D)$ valoarea sa, adică

$$J(D) = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Să arătăm că pentru un $\varepsilon > 0$ dat putem determina o secţiune $\overline{D}$ în D, astfel încât, pentru orice altă secţiune D' a lui D cu proprietatea $\overline{D} \subset D'$, să avem

$$\Big| J(D) - \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.171}$$

Într-adevăr, dacă acest lucru nu este posibil, atunci pentru orice disc K de rază R există cel puţin o secţiune D_R, verificând relaţia $DK \subset D_R$, astfel încât să avem

$$\Big| J(D) - \iint\limits_{D_R} f(x,y)dxdy \Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să considerăm un şir crescător divergent R_n şi să punem $D_n = D_{R_n}$. Avem, pe de o parte,

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = D,$$

iar pe de altă parte,

$$\Big|J(D) - \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi $n \in I\!N$. Pe această cale se ajunge la concluzia absurdă că şirul numeric având termenul general

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$$

nu are limita $J(D)$.

Aşadar, relaţia (4.171) este satisfăcută pentru orice secţiune D' a domeniului nemărginit D, cu proprietatea $\overline{D} \subset D'$. Fie D" o altă secţiune, astfel încât $\overline{D} \subset D$". Alături de relaţia (4.171), putem scrie relaţia

$$\Big|J(D) - \iint\limits_{D"} f(x,y)dxdy\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.172}$$

iar din (4.171) şi (4.172) deducem imediat relaţia (4.170).

Condiţia este suficientă. Fie $\varepsilon > 0$, $\overline{D}$ o secţiune a domeniului nemărginit D şi (D_n) un şir monoton crescător de secţiuni ale lui D. Există un număr naturala $N(\varepsilon) = N$, astfel încât, pentru $n > N$, să avem $\overline{D} \subset D_n$. Dar, potrivit relaţiei (4.170), presupusă satisfăcută, vom avea

$$\Big|\iint\limits_{D_m} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy\Big| < \varepsilon,$$

pentru orice pereche de indici (m,n), astfel încât $m > N$, $n > N$.

În baza criteriului generala al lui Cauchy pentru şiruri numerice, aceasta înseamnă că şirul numeric

$$\Big(\int_{D_n} f(x,y)dxdy\Big)$$

are o limită finită, deci $f(P)$ este integrabilă pe D. ∎

Corolarul 4.11.1 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţia f să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca să existe un număr real $J(D)$, astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, să avem*

$$\Big| J(D) - \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \Big| < \varepsilon,$$

îndată ce $\overline{D} \subset D'$, unde $\overline{D}$ este o secţiune ce depinde de ε.

Justificarea acestui corolar nu prezintă nici o dificultate.

Integrala pe un domeniu nemărginit, aşa cum a fost definită mai sus, păstrează principalele proprietăţi ale integralei duble pe un domeniu mărginit. Astfel, aditivitatea în raport cu domeniul de integrare, liniaritatea, monotonia şi formula schimbării de variabile sunt proprietăţi adevărate şi în cazul integralei duble pe un domeniu nemărginit.

În legătură cu integrabilitatea unei funcţii pozitive f pe un domeniu nemărginit D are loc

Teorema 4.11.3 *Dacă funcţia pozitivă f definită pe un domeniu nemărginit $D \subset I\!R^2$ este integrabilă pe orice subdomeniu compact a lui D, care are arie, atunci f este integrabilă impropriu pe D dacă şi numai dacă există o exhaustiune (D_n) a lui D astfel încât limita*

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = I \qquad (4.173)$$

să existe şi să fie finită. În plus, are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă în baza Definiţiei 4.11.5.

Suficienţa. Fie (D_n) o exhaustiune a lui D pentru care există şi este finită limita (4.173) şi (D'_n) o altă exhaustiune a lui D. Din Definiţia 4.11.2 rezultă că există un indice $k(n)$ astfel încât $D'_n \subset D_{k(n)}$. Din faptul că f are valori pozitive pe D, rezultă

$$\iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{D_{k(n)}} f(x,y)dxdy \leq I.$$

Tot din faptul că $f(x,y) \geq 0$ pe D rezultă că şirul $\Big(\displaystyle\iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy\Big)$ este monoton crescător şi mărginit superior de I, prin urmare există şi este finită limita

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy = I'. \tag{4.174}$$

Între limitele (4.173) şi (4.174) are loc inegalitatea $I' \leq I$. Dacă schimbăm rolul celor două exhaustiuni obţinem că $I \leq I'$ şi deci $I' = I$. Cum exhaustiunea (D'_n) a fost luată arbitrar, deducem că f este integrabilă impropriu pe D şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = I. \tag{4.175}$$

■

Exerciţiul 4.11.1 *Să se arate că funcţia* $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ *este integrabilă impropriu pe mulţimea* $I\!R_+ \times I\!R_+$ *şi să se deducă apoi că valoarea integralei lui Poisson este*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.176}$$

Soluţie. Deoarece f este pozitivă pe domeniul nemărginit de integrare D, este suficient să considerăm o exhaustiune particulară a lui $D = I\!R_+ \times I\!R_+ = I\!R^2_+$. Luăm

$$D_n = \{(x,y) \in I\!R^2 \;:\; x^2+y^2 \leq n^2;\; x \geq 0,\, y \geq 0\}$$

şi atunci

$$I = \iint\limits_{I\!R^2_+} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Dacă trecem la coordonate polare în plan, obţinem

$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \rho\, e^{-\rho^2}d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$-\frac{\pi}{4} \lim_{n\to+\infty} e^{-\rho^2}\Big|_0^n = \frac{\pi}{4} \lim_{n\to+\infty}(1-e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4},$$

ceea ce arată că f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{R}^2_+$ şi că valoarea integralei este $\dfrac{\pi}{4}$. Considerând orice altă exhaustiune (D'_n) a lui $\mathbb{R}^2_+$, limita (4.174) are aceeaşi valoare, adică $\pi/4$.

Să considerăm exhaustiunea (D'_n), unde $D'_n = [0,n]\times[0,n]$. Atunci,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n dx\int_0^n e^{-(x^2+y^2)}dy =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^n e^{-x^2}\Big)^2 = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\Big)^2.$$

Dacă ţinem seama de Teorema 4.11.3, din confruntarea celor două rezultate deducem (4.176). ■

În continuare vom da, fromână demonstraţie, unele rezultate în legătură cu integralele duble improprii.

Teorema 4.11.4 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie funcţie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca funcţia $|f|$ să fie integrabilă pe acest domeniu.*

Această teorema confirmă faptul că definiţia dată, în cazul domeniilor nemărginite, pentru simbolul $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, conduce la un mod de convergenţă foarte rapid pentru integralele respective, convergenţă care are ca urmare coincidenţa naturii integralelor improprii

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{şi} \quad \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

O asemenea echivalenţă nu are loc în cazul unei singure dimensiuni.

Din punct de vedere practic, teorema precedentă aduce o simplificare considerabilă în studiul convergenţei integralelor duble improprii, întrucât noţiunea de integrală *semiconvergentă* din teoria integralelor improprii a unei funcţii de o variabilă nu–şi mai are corespondent în teoria integralelor duble. Divergenţa integralei $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ atrage după sine totdeauna divergenţa integralei $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Cazurile în care se poate stabili convergenţa unei integrale duble pe baza celor două teoreme precedente sunt foarte rare. De aceea, în practică, ca şi în orice problemă de convergenţă, se caută condiţii suficiente (criterii) pe baza cărora să se poată stabili dacă o integrală dublă improprie este sau nu convergentă. Vom enunţa aici câteva condiţii de acest gen.

Teorema 4.11.5 *Dacă g este funcţie integrabilă pe domeniul nemărginit D şi*

$$|f(x,y)| \leq |g(x,y)|, \quad (\forall)\,(x,y) \in D,$$

atunci f este funcţie integrabilă pe D.

Teorema 4.11.6 *Dacă funcţia g este integrabilă pe domeniul nemărginit D şi există $M > 0$ astfel încât*

$$\Big|\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\Big| < M, \quad (\forall)\ (x,y) \in D,$$

atunci f este funcţie integrabilă pe D.

Teorema 4.11.7 *Orice funcţie f care se poate pune sub forma*

$$f(P) = \frac{\varphi(P)}{\Big(d(C,P)\Big)^{\alpha}}, \quad (\forall)\ P \in D,$$

unde $\alpha > 2$, C este un punct fix al planului, iar φ o funcţie mărginită pe domeniul nemărginit D, este integrabilă pe D.

Teorema 4.11.8 *Dacă pentru un şir particular (D_n) de secţiuni ale domeniului nemărginit D tinzând către acest domeniu, şirul numeric corespunzător*

$$\Big(\iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy\Big)$$

este convergent, atunci f este integrabilă pe domeniul D.

Teorema 4.11.9 *Dacă integralele improprii de prima speţă*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy$$

sunt absolut convergente, atunci funcţia $f(x)\cdot g(y)$ *este integrabilă pe* $I\!R^2$ *şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{I\!R^2} f(x)\cdot g(y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy.$$

În particular, dacă f *şi* g *sunt funcţii pare, absolut integrabile pe* $[0,+\infty)$, *atunci funcţia* $f(x)\cdot g(y)$, *definită pentru* $(x,y)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, *este integrabilă pe* $I\!R^2_+ = [0,+\infty)\times[0,+\infty)$ *şi*

$$\iint\limits_{I\!R^2_+} f(x)\cdot g(y)dxdy = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{0}^{+\infty} g(y)dy.$$

Folosind ultima teoremă putem stabili formula lui Jacobi care dă legătura între funcţiile B şi Γ ale lui Euler. Reamintim că

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-y}dy, \quad B(p,q) = \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv.$$

Pe lângă numărul pozitiv p, să considerăm valoarea în $q>0$ a funcţiei Γ scrisă astfel

$$\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{q-1}e^{-x}dx$$

şi să efectuăm produsul numerelor $\Gamma(p)$ şi $\Gamma(q)$. Conform ultimei teoreme,

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \iint\limits_{I\!R^2_+} e^{-(x+y)}x^{q-1}y^{p-1}dxdy.$$

Dacă în integrala dublă improprie facem schimbarea de variabilă

$$T:\ \begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$$

atunci domeniul $D' = [0,+\infty)\times[0,1]$ se transformă în $I\!R^2_+$.

Jacobianul transformării punctuale regulate T va fi

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & v \\ -u & u \end{vmatrix} = u(1-v)+uv = u$$

şi deci

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\int_0^1 dv\int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot u^{p+q-1}\cdot v^{p-1}\cdot(1-v)^{q-1}du=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot u^{p+q-1}du\cdot\int_0^{+\infty} v^{p-1}\cdot(1-v)^{q-1}dv=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q).$$

Prin urmare,

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{B(p+q)}.$$

Exerciţiul 4.11.2 *Să se studieze natura integralei duble improprii pe domeniu nemărginit*

$$I=\iint_D \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)\Big]dxdy,$$

unde $D=\{(x,y)\in I\!R^2:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1\}$.

Soluţie. Domeniul de integrare este exteriorul mulţimii de puncte aflate în interiorul elipsei de semiaxe a şi b ce are axele de coordonate drept axe de simetrie. Este deci un domeniu nemărginit închis.

Folosim coordonatele polare generalizate din plan. Prin urmare, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x &= a\rho\cos\theta\\ y &= b\rho\sin\theta.\end{cases}$$

Pentru ca punctul $M(x,y)$ să descrie domeniul D, perechea (ρ,θ) trebuie să fie astfel încât $\rho\in[0,+\infty)$ şi $\theta\in[0,2\pi]$.

Ţinând cont că jacobianul transformării punctuale regulate de mai sus este $J=ab\rho$, rezultă că integrala improprie de mai sus devine

$$I=ab\iint_\Delta \rho\exp\,(-\rho^2)d\rho d\theta,$$

unde Δ este intervalul bidimensional nemărginit $\Delta=[1,+\infty)\times[0,2\pi]$.

Scriind noua integrală ca o iteraţie de integrale, obţinem

$$I=ab\int_1^{+\infty}\rho\exp\,(-\rho^2)d\rho\int_0^{2\pi}=\frac{\pi ab}{e}.$$

■

4.11.2 Integrale duble din funcţii nemărginite

Să considerăm cazul în care funcţia reală f este definită pe domeniul $D \setminus \{M_0\} \subset I\!R^2$, unde M_0 este un punct din D cu proprietatea că f este nemărginită în orice mulţime $D \cup V$, mulţimea V fiind o vecinătate oarecare a lui M_0. Atunci, se spune că f are o singularitate în punctul M_0.

În continuare vom presupune că D şi V sunt mulţimi care au arie şi că f este integrabilă pe $D \setminus D \cap V$. Notăm cu $d(V)$ diametrul lui V şi fie (V_n) un şir descendent $V_{n+1} \subset V_n$ de vecinătăţi ale lui M_0 care să tindă la mulţimea formată doar din punctul M_0. Ultima condiţie are loc dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} d(V_n) = 0$.

Definiţia 4.11.6 *Spunem că f este* **integrabilă impropriu** *pe D dacă există un număr I, astfel încât pentru orice şir de vecinătăţi (V_n) ale lui M_0, cu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(V_n) = 0$, să avem*

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D\setminus D\cap V_n} f(x,y)dxdy = I$$

şi vom scrie

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = I.$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este *convergentă*. Rezultate asemănătoare celor de la integrala dublă pe domenii nemărginite pot fi stabilite şi în acest caz. Presupunând pentru simplitate că punctul singular este originea reperului Oxy, se poate arăta că orice problemă privind integrabilitatea funcţiei f pe domeniul D, unde f este nemărginită în vecinătăţi ale originii se reduce la problema integrabilităţii funcţiei

$$F(u,v) = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} \cdot f\Big(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\Big)$$

pe domeniul nemărginit Δ, imaginea lui D prin transformarea punctuală

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Într-adevăr, transformarea punctuală de mai sus are inversa

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2+v^2} \tag{4.177}$$

care, în ipoteza $u^2 + v^2 > 0$, reprezintă o inversiune de pol O şi de putere 1, al cărei determinant funcţional este

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2} < 0.$$

În urma acestei inversiuni, orice curbă rectificabilă închisă C din planul (x, y) se transformă întro curbă C_1 a planului (u, v), închisă sau cu ramuri infinite, după cum curba C conţine sau nu polul de inversiune.

În primul caz, domeniului închis de curba C îi corespunde, în planul (u, v), domeniul nemărginit exterior curbei C_1.

În cazul al doilea, domeniului limitat de curba C îi corespunde una din regiunile nemărginite ale planului (u, v) determinate de curba C_1.

În ambele cazuri, oricărui şir de domenii $(C_n(O))$, tinzând către punctul singular O, îi corespunde în planul (u, v) un şir de secţiuni (Δ_n) ale domeniului transformat Δ, tinzând către acest domeniu şi reciproc.

Formula de schimbare a variabilelor

$$\iint\limits_{C_n(O)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta_n} F(u,v)dudv$$

justifică afirmaţia făcută la începutul comentariului.

Ca aplicaţie, vom transpune la cazul studiat criteriul formulat în Teorema 4.11.8.

Să presupunem că putem scrie funcţia f sub forma

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

unde φ este mărginită pe domeniul D. Cu schimbarea de variabilă (4.177), obţinem

$$\iint\limits_{C_n(O)} \frac{\varphi(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dxdy = \iint\limits_{\Delta_n} \frac{\Phi(u,v)}{(u^2+v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}} dudv,$$

unde

$$\Phi(u,v) = \varphi\Big(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\Big).$$

Dar, potrivit criteriului din Teorema 4.11.7, funcţia

$$F(u,v) = \frac{\Phi(u,v)}{(u^2+v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}}$$

este integrabilă pe Δ dacă $4-\alpha>2$, adică $\alpha<2$.

Aşadar, orice funcţie f care se poate scrie sub forma

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{(d(O,P))^{\alpha}},$$

unde $P(x,y)$, $\alpha<2$, iar φ este integrabilă în sens obişnuit (deci mărginită) pe domeniul D, este integrabilă pe acest domeniu.

În cazul în care $\varphi(x,y)=1$, valorile lui $\alpha>0$ pentru care $f(x,y)=\dfrac{1}{(d(O,P))^{\alpha}}$ este integrabilă pe un disc de rază R cu centrul în punctul O se pot determina utilizând trecerea la coordonatele polare în plan. Este posibil ca punctul O să fie înlocuit cu un punct oarecare $M_0(x_0,y_0)$.

Exerciţiul 4.11.3 *Să se afle valorile lui $\alpha>0$ pentru care este convergentă integrala*

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha}}dxdy,$$

unde

$$D=\{(x,y)\in I\!R^2\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2\}.$$

Soluţie. În acest caz $M_0=(x_0,y_0)$. Considerăm

$$V_n=\{(x,y)\in I\!R^2\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\frac{1}{n^2}\},$$

unde n este un număr natural suficient de mare astfel încât $V_n\subset D$, şi integrala dublă

$$I_n=\iint\limits_{D\setminus V_n}\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha}}dxdy,$$

care o vom calcula trecând la coordonate polare în plan.

$$I_n=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{1/n}^{R}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}}=2\pi\int_{1/n}^{R}\rho^{1-2\alpha}d\rho=$$

$$=2\pi\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\Big|_{1/n}^{R}=\frac{\pi}{1-\alpha}\Big[R^{2-2\alpha}-\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\Big].$$

Trecând la limită în rezultatul găsit, obţinem că dacă $\alpha\in(0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{D\setminus V_n}\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha}}dxdy=\frac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}.$$

Aşadar, integrala studiată este convergentă doar dacă $\alpha\in(0,1)$. ■

Capitolul 5

Integrale de suprafaţă

5.1 Elemente de geometria diferenţială a suprafeţelor

În acest paragraf vom utiliza rezultate ale calculului diferenţial pentru a studia unele noţiuni frecvent întâlnite în geometria diferenţială a suprafeţelor şi teoria integrabilităţii pe suprafeţe a funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

5.1.1 Pânze parametrice netede

În spaţiul afin euclidian tridimensional $\mathcal{E}_3$, asociat spaţiului liniar $I\!R^3$, considerăm reperul cartezian $Oxyz$, a cărui bază $\mathcal{B}'$ este constituită din versorii

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\} \subset I\!R^3. \tag{5.1}$$

Un punct oarecare $M \in \mathcal{E}_3$ este determinat de coordonatele carteziene (x, y, z) sau de vectorul de poziţie $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, unde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, iar x, y, z sunt mărimile algebrice ale proiecţiilor ortogonale ale vectorului $\mathbf{r}$ pe respectiv versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Definiţia 5.1.1 *Se numeşte* **pânză parametrică netedă** *funcţia vectorială de două variabile reale*

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}, \quad (u, v) \in A \subset I\!R^2, \tag{5.2}$$

continuă pe mulţimea nevidă A şi cu derivate parţiale continue pe $\overset{\circ}{A}$.

Funcţia vectorială de două variabile reale (5.2) stabileşte o corespondenţă între punctele $(u, v) \in A$ şi punctele $M \in \mathcal{E}_3$ ale căror vectori de poziţie sunt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in A. \tag{5.3}$$

Observaţia 5.1.1 *Având în vedere modurile de reprezentare ale unei funcţii vectoriale de mai multe variabile reale, rezultă că în locul lui* (5.2), *pe lângă* (5.3), *putem considera şi reprezentarea*

$$\begin{cases} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in A. \tag{5.4}$$

Definiţia 5.1.2 *Imaginea funcţiei* (5.2), *adică mulţimea* $\mathbf{r}(A) \subset I\!R^3$, *va fi numită de asemeni* **pânză netedă în** $\mathcal{E}_3$, *iar* (5.4) *şi* (5.3) *se numesc respectiv* **ecuaţii parametrice** *şi* **ecuaţia vectorială** *ale pânzei netede.*

Submulţimea de puncte $(S) \subset \mathcal{E}_3$ ale căror vectori de poziţie au forma (5.3) o vom numi , de asemenea, pânză netedă.

Observaţia 5.1.2 *Deoarece* $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(A, I\!R^3)$ *are derivate parţiale continue pe* $\overset{\circ}{A}$, *rezultă că este diferenţiabilă pe* $\overset{\circ}{A}$, *deci în orice punct* $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ *se poate defini diferenţiala sa* $d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0)\Big) \in L\Big(I\!R^2, I\!R^3\Big)$, *unde* $L\Big(I\!R^2, I\!R^3\Big)$ *este spaţiul vectorial al aplicaţiilor liniare definite pe* $I\!R^2$ *cu valori în* $I\!R^3$.

Matricea aplicaţiei liniare $d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0)\Big)$ în perechea de baze canonice

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\} \subset I\!R^2$$

şi $\mathcal{B}' \subset I\!R^3$ din (5.1), este de tipul 3×2 şi are elementele

$$J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Observaţia 5.1.3 *Coloanele matricei jacobiene $J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0))$ sunt respectiv matricele coloană ale coordonatelor vectorilor:*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0); \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

în baza canonică $\mathcal{B}'$.

În aplicaţiile practice ale calculului integral, ale geometriei diferenţiale, mecanicii, fizicii etc. în definiţia pânzei parametrice se include încă o *condiţie de regulatitate* care afirmă că rangul matricei $J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0))$ este egal cu 2 în orice punct $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$. Această condiţie se scrie sub forma

$$\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2 + \Big(\frac{D(z,x}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2 + \Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2 > 0. \qquad (5.5)$$

5.1.2 Semnificaţia geometrică a condiţiei de regularitate. Linii parametrice

Pentru a vedea semnificaţia geometrică a condiţiei de regularitate (5.5) să considerăm funcţia

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0), \;\; u \in I \subset I\!R, \;\; I \times \{v_0\} \subset A, \qquad (5.6)$$

care este restricţia funcţiei $\mathbf{r}$ la segmentul de dreaptă $v = v_0$ paralel cu axa absciselor reperului cartezian din $\mathcal{E}_2$. Acest segment trece prin punctul $M_0'(u_0, v_0)$ şi este conţinut în mulţimea A. Aplicaţia (5.6) este continuu diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{I}$, prin urmare reprezintă un drum parametrizat neted în $I\!R^3$ de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad u \in I. \qquad (5.7)$$

Avem $\operatorname{Im} \mathbf{r}(\cdot, v_0) \subset \operatorname{Im} \mathbf{r}$, deci imaginea drumului (5.7) este o submulţime a pânzei netede de ecuaţie vectorială (5.3). După cum se ştie,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k} \qquad (5.8)$$

este vectorul director al tangentei la drumul de ecuaţie vectorială (5.7) în punctul $M_0 \in (S)$.

În mod similar, aplicaţia

$$v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v), \;\; v \in J \subset I\!R, \;\; v \in J \subset I\!R, \;\; \{u_0\} \times J \subset A, \qquad (5.9)$$

este un drum parametrizat neted în $I\!R^3$ de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in J, \tag{5.10}$$

a cărui imagine este tot o submulţime a lui Im$\mathbf{r}$. Vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k} \tag{5.11}$$

este vector director al tangentei la drumul parametrizat neted (5.10) în punctul $M_0 \in (S)$.

Produsul vectorial al vectorilor (5.8) şi (5.11) este vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \tag{5.12}$$

care, după dezvoltarea determinantului din membrul al doilea după elementele primei linii, se scrie

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}, \tag{5.13}$$

unde

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0).$$

Vectorul (5.13) este ortogonal pe vectorul $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ şi pe vectorul $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Din cele prezentate mai sus rezultă că condiţia de regularitate (5.5) este echivalentă cu

$$\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} > 0 \tag{5.14}$$

şi exprimă faptul că vectorii $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ şi $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ sunt necoliniari sau liniar independenţi. Din punct de vedere geometric, condiţia (5.14) se traduce prin

aceea că imaginile drumurilor parametrizate (5.7) şi (5.10) au în punctul comun M_0 tangente distincte. Corespondenţa (5.4) fiind şi biunivocă, rezultă că în vecinătatea punctului $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ drumurile (5.7) şi (5.10) au în comun doar punctul $M_0 \in (S)$. Imaginile acestor drumuri se numesc *linii parametrice*. Prin fiecare punct $M_0 \in (S)$, corespunzător punctului $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$, unde sunt satisfăcute condiţiile de regularitate, trece un drum şi numai unul singur de forma (5.6) şi numai un drum de tipul (5.9).

5.1.3 Interpretarea geometrică a diferenţialei funcţiei vectoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ în punctul $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$. Plan tangent

Să vedem acum ce interpretare geometrică are funcţia afină

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big), \quad (u, v) \in I\!R^2, \tag{5.15}$$

unde valoarea în perechea $(u - u_0, v - v_0)$ a diferenţialei în punctul (u_0, v_0) a funcţiei $\mathbf{r}$ este

$$d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big) = \mathbf{e}'\Big(J_{\mathbf{r}}(u_0, v_0)\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}\Big). \tag{5.16}$$

Vectorul $\mathbf{e}'$ din relaţia (5.16) aparţine spaţiului liniar $I\!R^3 \times I\!R^3 \times I\!R^3$ şi are expresia $\mathbf{e}' = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Aplicaţia (5.15) defineşte o nouă pânză parametrică netedă de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big), \quad (u, v) \in I\!R^2 \tag{5.17}$$

sau de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = x(u_0, v_0) + \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y = y(u_0, v_0) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ z = z(u_0, v_0) + \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0). \end{cases} \tag{5.18}$$

Eliminarea lui $u - u_0$ şi $v - v_0$ din (5.18) conduce la ecuaţia

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{5.19}$$

unde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ sunt coordonatele punctului M_0. Ecuaţia (5.19) arată că vectorul cu originea în M_0 şi extremitatea întrun punct curent M al pânzei (5.17) este ortogonal pe vectorul (5.13).

Toate punctele M din spaţiu cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este ortogonal pe vectorul $\mathbf{N} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$ formează un plan.

Prin urmare, pânza parametrică de ecuaţie vectorială (5.17) sau de ecuaţii parametrice (5.18) are ca imagine un plan care se numeşte *plan tangent* în punctul M_0 la pânza parametrică netedă de ecuaţie vectorială (5.3). Acest plan are în comun cu $\mathrm{Im}\,\mathbf{r}$, întro vecinătate a punctului M_0, doar punctul M_0. Diferenţa

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) - d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big), (u, v) \in \overset{\circ}{A} \tag{5.20}$$

caracterizează *abaterea* dintre coordonatele punctelor de pe imaginea pânzei netede de ecuaţie vectorială (5.3) şi coordonatele punctelor corespunzătoare de pe planul (5.17) în vecinătatea punctului (u_0, v_0) căruia pe pânză îi corespunde punctul M_0.

Deoarece diferenţiabilitatea lui $\mathbf{r}$ în punctul (u_0, v_0) implică faptul că abaterea (5.20) tinde la zero mai repede decât tinde la zero distanţa euclidiană dintre punctele (u, v) şi (u_0, v_0) când $(u, v) \to (u_0, v_0)$, rezultă că planul (5.17) *aproximează* satisfăcător $\mathrm{Im}\,\mathbf{r}$ întro vecinătate a punctului M_0.

Exemplul 5.1.1 *Să se arate că aplicaţia* $\mathbf{r} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to I\!R^3$ *definită prin*

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \sin v)\,\mathbf{i} + (a \sin u \sin v)\,\mathbf{j} + (a \cos v)\,\mathbf{k}, \quad a > 0,$$

reprezintă o pânză parametrică netedă şi să se studieze această pânză.

Soluţie. Aplicaţia dată este continuu diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{A} = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ deoarece funcţiile coordonate $x,\ y,\ z$ sunt diferenţiabile pe $\overset{\circ}{A}$.

Ecuaţiile parametrice ale pânzei sunt

$$\begin{cases} x &= a \cos u \sin v, \\ y &= a \sin u \sin v, \qquad u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi]. \\ z &= a \cos v, \end{cases}$$

Calculând distanţa euclidiană de la punctul $M(x,y,z)$ al pânzei la originea reperului $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, găsim

$$d^2(M,O) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \sin^2 v(\cos^2 u + \sin^2 u) + a^2 \cos^2 v =$$

$$= a^2(\sin^2 v + \cos^v) = a^2,$$

de unde rezultă $d(M,O) = a$, ceea ce arată că $\mathrm{Im}\mathbf{r}$ este frontiera bilei cu centrul în origine şi raza egală cu a, adică sfera de rază a cu centrul în origine.

Matricea jacobiană $J_{\mathbf{r}}(u,v)$ a aplicaţiei date este

$$J_{\mathbf{r}}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin u \sin v & a\cos u \cos v \\ a\cos u \sin v & a \sin u \cos v \\ 0 & -a\sin v \end{pmatrix}.$$

Conform Observaţiei 5.1.3, elementele coloanelor matricei $J_{\mathbf{r}}$ sunt coordonatele vectorilor $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ şi respectiv $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, prin urmare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) &= -(a\sin u\sin v)\,\mathbf{i} + (a\cos u \sin v)\,\mathbf{j} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) &= (a\cos u\cos v)\mathbf{i} + \\ &+ (a\sin u\cos v)\mathbf{j} - (a\sin v)\mathbf{k}. \end{cases} \tag{5.21}$$

Produsul vectorial al vectorilor (5.21) este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin u\sin v & a\cos u\sin v & 0 \\ a\cos u\cos v & a\sin u\sin v & -a\sin v \end{vmatrix} =$$

$$= -a\sin v\,\mathbf{r}(u,v),$$

oricare ar fi perechea $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,\pi)$. Deoarece pentru $v \in (0,\pi)$ avem $a\sin v > 0$ rezultă că vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, diferit de vectorul nul, este coliniar şi de sens contrar vectorului de poziţie $\mathbf{r}(u,v)$.

Tangentele la liniile parametrice care trec prin punctul M_0 de vector de poziţie $\overrightarrow{OM_0}= \mathbf{r}(u_0, v_0)$, unde $(u_0, v_0) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, determină planul tangent la sferă în M_0 care are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (t - u_0, s - v_0)\Big), \quad (t, s) \in I\!R^2.$$

Pentru punctele $(t, s) = (u, v)$ situate întro vecinătate a punctului (u_0, v_0) din mulţimea deschisă $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$, membrul doi din ultima ecuaţie aproximează satisfăcător punctele corespunzătoare de pe sferă.

Spre exemplu, dacă luăm $u_0 = v_0 = \dfrac{\pi}{4}$, atunci $M_0\Big(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$, matricea jacobiană $J_{\mathbf{r}}\Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\Big)$ este

$$J_{\mathbf{r}}\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2} \\ 0 & -\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

iar ecuaţiile parametrice ale planului tangent la sferă în punctul M_0 sunt

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2}\, t + \dfrac{a}{2}\, s \\ y &= \dfrac{a(2-\pi)}{4} + \dfrac{a}{2}\, t + \dfrac{a}{2}\, s \\ z &= \dfrac{a\sqrt{2}(\pi + 4)}{8} - \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\, s, \quad (t, s) \in I\!R^2. \end{cases}$$

Eliminând t şi s din aceste ecuaţii obţinem ecuaţia explicită a planului tangent

$$x + y + z\sqrt{2} - 2\,a = 0.$$

Un vector normal acestui plan este $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$. ■

Este posibil ca funcţiile $x,\ y,\ z$ din (5.4) să fie astfel încât

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = f(u, v),$$

unde $f \in \mathcal{F}(A)$ este o funcţie continuă pe mulţimea A situată în planul Oxy, cu derivate parţiale continue pe mulţimea $\overset{\circ}{A}$, aceasta însemnând că $u = x$,

$v = y$, iar z este o funcţie *continuu diferenţiabilă* de x şi y. În această situaţie, în locul ecuaţiilor (5.4) putem considera doar ecuaţia

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A. \tag{5.22}$$

Funcţia reală f, continuă pe mulţimea $A \subset Oxy$ şi diferenţiabilă pe mulţimea $\overset{\circ}{A}$, defineşte *explicit* pânza netedă $\mathrm{Im}\,\mathbf{r}$, iar (5.22) se numeşte *ecuaţia explicită* a pânzei netede. Ecuaţia vectorială a pânzei, corespunzătoare acestui caz particular, este

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}, \quad (x, y) \in A. \tag{5.23}$$

Vectorul tangent în $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + f(x, y_0)\,\mathbf{k}, \quad x \in I, \quad I \times \{y_0\} \subset \overset{\circ}{A} \tag{5.24}$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + p\,\mathbf{k}, \tag{5.25}$$

iar vectorul tangent în M_0 la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x_0\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x_0, y)\,\mathbf{k}, \quad y \in J, \quad \{x_0\} \times J \subset \overset{\circ}{A} \tag{5.26}$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathbf{k} = \mathbf{j} + q\,\mathbf{k}. \tag{5.27}$$

Drumurile parametrizate (5.24) şi (5.26) sunt obţinute prin intersecţia pânzei netede (5.22) cu planele $y = y_0$ şi $x = x_0$ care sunt paralele respectiv cu planele Oxz şi Oyz. Coeficienţii A, B şi C sunt:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -p; \quad B = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -q; \quad C = 1, \tag{5.28}$$

astfel că ecuaţia planului tangent în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la pânza netedă (5.22) este

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - z_0) = 0. \tag{5.29}$$

5.1.4 O altă definiţie a planului tangent

Să considerăm acum pânza netedă de ecuaţie vectorială (5.3) şi un drum parametrizat neted $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^3)$, unde I este interval din $I\!R$, cu proprietatea că există $t_0 \in I$ astfel încât

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0), \quad \text{şi} \quad \mathrm{Im}\, \mathbf{f} \subset \mathrm{Im}\, \mathbf{r}. \tag{5.30}$$

Aceste proprietăţi arată că imaginea drumului parametrizat considerat este situat pe pânza parametrică netedă (5.3) şi că această imagine trece prin punctul M_0 de pe pânză al cărui vector de poziţie este $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Proprietăţile de mai sus au loc dacă există un drum neted

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) : I \to A \ \text{ astfel încât } \ \mathbf{f} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varphi}. \tag{5.31}$$

Tangenta în M_0 la drumul parametrizat neted $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)\, s, \quad s \in I\!R. \tag{5.32}$$

Pe de altă parte, după regula lanţului de derivare a unei funcţii compuse, avem

$$\mathbf{f}'(t_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\varphi_1'(t_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\varphi_2'(t_0). \tag{5.33}$$

Din (5.33) şi valoarea în $\mathbf{h} = \boldsymbol{\varphi}'(t_0)$ a diferenţialei funcţiei $\mathbf{r}$ în punctul (u_0, v_0) rezultă

$$\mathbf{f}'(t_0) = d\,\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); \boldsymbol{\varphi}'(t_0)\Big),$$

iar din liniaritatea diferenţialei de ordinul întâi, avem

$$\mathbf{f}'(t_0)\, s = d\,\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); s\, \boldsymbol{\varphi}'(t_0)\Big). \tag{5.34}$$

Folosind în (5.32) relaţiile (5.34) şi (5.30) şi luând în calcul formula (5.17) deducem că tangenta (5.32) este inclusă în planul tangent (5.17) în punctul M_0 la pânza netedă (5.3). Acest rezultat conduce la o altă definiţie a planului tangent într-un punct al unei pânze parametrice netede.

Definiţia 5.1.3 *Se numeşte* **plan tangent** *în punctul M_0 al unei pânze netede, locul geometric al tangentelor la respectiv toate drumurile netede care trec prin M_0 ale căror imagini se află pe imaginea pânzei.*

5.1.5 Definiţia suprafeţei

Definiţia 5.1.4 *Pânzele netede* $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^3)$ *şi* $\widetilde{\mathbf{r}} \in \mathcal{F}(\widetilde{A}, I\!\!R^3)$, *unde* $A, \widetilde{A} \subset I\!\!R^2$, *se numesc* **echivalente** *dacă există un homeomorfism diferenţiabil* $\boldsymbol{\psi} : A \to \widetilde{A}$, *cu jacobianul pozitiv în orice punct* $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$, *astfel încât* $\mathbf{r} = \widetilde{\mathbf{r}} \circ \boldsymbol{\psi}$.

Definiţia 5.1.5 *Se numeşte* **suprafaţă netedă** *o clasă de echivalenţă în mulţimea pânzelor parametrice netede.*

O suprafaţă netedă poate fi reprezentată prin oricare pânză parametrică netedă care aparţine clasei de echivalenţă respective. În concluzie, întro vecinătate a unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, o suprafaţă netedă care conţine acest punct poate fi reprezentată fie vectorial prin ecuaţia vectorială (5.3), fie parametric prin ecuaţiile parametrice (5.4), fie prin *ecuaţia carteziană explicită* (5.22). Reprezentarea (5.22) se obţine din oricare reprezentare parametrică în baza teoremei de existenţă şi unicitate a sistemelor de funcţii reale de mai multe variabile reale definite implicit.

Observaţia 5.1.4 *Analizând* (5.31) *constatăm că orice funcţie diferenţiabilă, depinzând de parametrii* u *şi* v *ai unei suprafeţe netede* $(\mathcal{S})$, *asociată ecuaţiei sale vectoriale* (5.3), *defineşte o* **curbă situată** (**trasată**) **pe suprafaţă**. *Curbele particulare* $u = \text{const.}$ *şi respectiv* $v = \text{const.}$ *se numesc* **curbe coordonate** *sau* **linii parametrice** *ale suprafeţei netede* $(\mathcal{S})$. *O curbă trasată pe o suprafaţă poate avea* **ecuaţia explicită** $v = f(u)$ *sau* **ecuaţia implicită** $F(u, v) = 0$.

De exemplu, drumurile (5.24), (5.26) care reprezintă clase de echivalenţă în mulţimea drumurilor echivalente numite curbe, sunt linii parametrice ale suprafeţei $(\mathcal{S})$ reprezentată cartezian explicit prin (5.22).

5.1.6 Ecuaţia carteziană implicită a unei suprafeţe

Fie aplicaţia reală diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$, $A \subset I\!\!R^3$, cu proprietea că gradientul

$$(\boldsymbol{\nabla} F)(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\,\mathbf{k}, \tag{5.35}$$

este vector nenul pe mulţimea deschisă $\overset{\circ}{A}$, adică

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\Big)^2 > 0,\ (x, y, z) \in \overset{\circ}{A}\,. \tag{5.36}$$

Definiţia 5.1.6 *Mulţimea* $(\mathcal{S})$ *a punctelor* $M \in \mathcal{E}_3$ *ale căror coordonate* (x, y, z) *verifică ecuaţia*

$$(\mathcal{S}): \quad F(x, y, z) = 0, \tag{5.37}$$

unde funcţia diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$ *satisface* (5.36), *se numeşte* **varietate bidimensională scufundată în** $I\!R^3$ *sau* **suprafaţă dată implicit**. *Ecuaţia* (5.37) *este prin definiţie* **ecuaţia carteziană implicită** *a suprafeţei* $(\mathcal{S})$.

5.1.7 Vector normal unei suprafaţe întrun punct regulat

Fie I un interval din $I\!R$ şi aplicaţia vectorială de o variabilă reală diferenţiabilă $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(I, A)$ cu proprietatea

$$F(\boldsymbol{\varphi}(t)) = 0, \quad t \in I,$$

fapt ce exprimă că imaginea drumului parametrizat neted de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in I$$

se află pe varietatea bidimensională (5.37).

Datorită faptului că atât F cât şi $\boldsymbol{\varphi}$ sunt funcţii diferenţiabile, rezultă că funcţia compusă $F \circ \boldsymbol{\varphi}$ este diferenţiabilă, deci derivabilă pe I şi ca atare vom avea

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_2'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_3'(t) = 0, \quad t \in I. \tag{5.38}$$

Identitatea (5.38) arată că vectorul $(\boldsymbol{\nabla} F)(\boldsymbol{\varphi}(t))$ este ortogonal vectorului tangent $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ la drumul parametrizat $\boldsymbol{\varphi}$ în punctul $M \in \mathcal{E}_3$ corespunzător valorii t a parametrului. Pe de altă parte, toate tangentele în punctul M corespunzător valorii t a parametrului la respectiv toate drumurile parametrizate ce trec prin M şi sunt situate pe varietatea diferenţiabilă $(\mathcal{S})$ formează planul tangent în M la suprafaţă. Toate aceste rezultate conduc la următoarea definiţie.

Definiţia 5.1.7 *Fie suprafaţa netedă* $(\mathcal{S})$ *de ecuaţie carteziană implicită* (5.37) *şi* $M(x, y, z) \in (\mathcal{S})$. *Vectorul*

$$\mathbf{N} = (\boldsymbol{\nabla} F)(x, y, z), \tag{5.39}$$

se numeşte **vectorul normal** *la suprafaţă în punctul* M.

Proprietatea de a fi ortogonal pe vectorul tangent la orice drum neted situat pe varietatea diferenţiabilă $(\mathcal{S})$ care conţine punctul $M(x,y,z)\in\mathcal{S}$ o are şi vectorul

$$-\mathbf{N} = -(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z), \tag{5.40}$$

deci şi acesta poate fi numit *vector normal* în punctul M la suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$.

Observaţia 5.1.5 *Dacă suprafaţa netedă* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată prin ecuaţia vectorială* (5.3), *atunci vectorul normal* $\mathbf{N}$ *în punctul*

$$M(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in(\mathcal{S})$$

este, fie vectorul

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v), \tag{5.41}$$

fie opusul acestuia. Când suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ *este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia* (5.22), *din* (5.29) *deducem că vectorul normal în M(x,y,f(x,y)) este, fie*

$$\mathbf{N} = -p\,\mathbf{i} - q\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \tag{5.42}$$

fie opusul acestuia, p şi q fiind notaţiile lui Monge pentru derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f în punctul (x,y)

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v);\quad q=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Putem defini *versorul normal* întrun punct al unei suprafeţe netede ca fiind, după caz, versorul unuia din vectorii care apar în relaţiile (5.39)−(5.42). Versorul normal poate fi, după caz:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\,\frac{(\boldsymbol{\nabla}F)(x,y,z)}{\|(\boldsymbol{\nabla}F)(x,y,z)\|} = \\ &= \frac{\pm(F'_x(x,y,z)\,\mathbf{i}+F'_y(x,y,z)\,\mathbf{j}+F'_z(x,y,z)\,\mathbf{k})}{\sqrt{\Big(F'_x(x,y,z)\Big)^2+\Big(F'_y(x,y,z)\Big)^2+\Big(F'_z(x,y,z)\Big)^2}};\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\,\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)}{\Big\|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|} = \\ &= \pm\,\frac{A(u,v)\,\mathbf{i}+B(u,v)\,\mathbf{j}+C(u,v)\,\mathbf{k}}{\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}};\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\mathbf{n} = \pm\Big(\frac{-\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{i} + \frac{-\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{k}\Big). \tag{5.45}$$

Observăm că pentru fiecare caz de reprezentare a unei suprafeţe netede se pot defini doi versori normali care sunt coliniari şi de sens contrar.

Definiţia 5.1.8 *Coordonatele versorului normal la o suprafeţă netedă întrun punct al ei se numesc* **cosini directori**.

Definiţia 5.1.9 *Se numeşte* **normala** *în punctul M al unei suprafeţe netede $(\mathcal{S})$, dreapta (N) determinată de punctul M şi de unul din versorii normali ai suprafeţei în acel punct.*

Corespunzător celor doi versori normali întrun punct al unei suprafeţe vom avea două orientări ale normalei pe care le vom numi *orientarea pozitivă a normalei*, când vectorul ei director este $\mathbf{n}$, şi *orientarea negativă a normalei* când se alege drept direcţie a normalei vectorul $-\mathbf{n}$. În loc de orientare pozitivă şi respectiv orientare negativă a normalei se pot folosi şi termenii *sens pozitiv* şi respectiv *sens negativ al normalei.*

Definiţia 5.1.10 *Fie funcţia reală diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$ care satisface* (5.36) *şi punctul arbitrar $M_0(x_0, y_0, z_0) \in A$. Varietatea bidimensională de ecuaţie carteziană explicită*

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \tag{5.46}$$

se numeşte **varietate de nivel** *sau* **suprafaţă de nivel a funcţiei** *F corespunzătoare* **nivelului** *$F(x_0, y_0, z_0)$.*

Observaţia 5.1.6 *Vectorul normal în punctul $M(x, y, z)$ la suprafaţa de nivel* (5.46) *care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este* (5.35).

Observaţia 5.1.7 *Pentru fiecare punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ aparţinând vartietăţii de nivel* (5.46) *planul de ecuaţie*

$$(x - x_1)\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) + (y - y_1)\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1, z_1) + (z - z_1)\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

este **planul tangent** *în punctul M_1 la varietatea de nivel* (5.46).

Definiţia 5.1.11 *Dacă o suprafaţă $\mathcal{S}$ nu este netedă, însă poate fi scrisă ca reuniunea unui număr finit de suprafeţe netede, spunem că $\mathcal{S}$ este* **suprafaţă netedă pe porţiuni**.

5.1.8 Element de arie al unei suprafeţe netede

Să considerăm o suprafaţă netedă $(\mathcal{S})$ reprezentată de pânza parametrică (5.3). Prin punctul M de vector de poziţie $\mathbf{r}(u,v)$ de pe $\operatorname{Im}\mathbf{r}$ trece o curbă parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $v = \text{const.}$, al cărei vector tangent în M este $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ şi o curbă parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $u = \text{const.}$, al cărei vector tangent în M este $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$. Un vector de mărime infinitezimală, coliniar cu vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ este $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\,du$, iar un vector coliniar cu $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, de mărime infinitezimală, are forma $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\,dv$. Aceşti doi vectori determină un paralelogram infinitezimal inclus în planul tangent în M la suprafaţa $(\mathcal{S})$. Fie $d\sigma$ aria acestui paralelogram.

Ne propunem să calculăm expresia lui $d\sigma$ când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată fie prin ecuaţia vectorială (5.3), fie prin ecuaţiile parametrice (5.4) sau prin ecuaţia carteziană explicită (5.22).

Pentru aceasta ne folosim de interpretarea geometrică a mărimii produsului vectorial a doi vectori necoliniari $\mathbf{a} \in I\!R^3$ şi $\mathbf{b} \in I\!R^3$ care, se ştie, este aria paralelogramului din $\mathcal{E}_3$ ce are două din laturi reprezentanţii celor doi vectori întrun punct oarecare al spaţiului, adică

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\tau,$$

unde $\tau \in [0,\pi]$ este unghiul dintre cei doi vectori. Aplicând această formulă de calcul pentru $d\sigma$ găsim

$$\begin{aligned}(d\sigma)^2 \;=\;& \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|^2 \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|^2 \sin^2\tau (dudv)^2 = \\ & \Big(\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|^2 \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|^2 - \\ & -\Big(\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\| \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\| \cos\tau\Big)^2\Big)(dudv)^2,\end{aligned}$$

în care am folosit identitatea $\sin^2\tau + \cos^2\tau = 1$. Dacă ţinem cont că produsul scalar a doi vectori din $I\!R^3$ eşte egal cu produsul dintre mărimile vectorilor şi cosinusul unghiului dintre ei, iar pătratul normei (lungimii) unui vector este produsul scalar al acelui vector cu el însuşi, egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$d\sigma = \sqrt{E(u,v)\,G(u,v) - F^2(u,v)}\,dudv, \tag{5.47}$$

în care s–au făcut notaţiile

$$E(u,v) = \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) = \\ = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\Big)^2 \tag{5.48}$$

$$F(u,v) = \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|\,\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|\cos\tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \\ = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \tag{5.49}$$

$$G(u,v) = \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) = \\ = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\Big)^2. \tag{5.50}$$

Observaţia 5.1.8 *Pentru suprafaţa netedă de ecuaţie vectorială* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, *mărimea* $E(u,v)$ *este suma pătratelor elementelor primei coloane a matricei Jacobiene* $J_{\mathbf{r}}(u,v)$, $F(u,v)$ *este suma produselor elementelor corespunzătoare celor două coloane din* $J_{\mathbf{r}}(u,v)$, *iar* $G(u,v)$ *este suma pătratelor elementelor coloanei a doua a matricei* $J_{\mathbf{r}}(u,v)$.

Observaţia 5.1.9 *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată printr–o pânză netedă dată cartezian explicit prin* (5.22) *şi ţinem cont de* (5.23), *deducem că matricea jacobiană* $J_{\mathbf{r}}(x,y)$ *are elementele*

$$J_{\mathbf{r}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Din Observaţiile 5.1.8 şi 5.1.9 rezultă:

$$E(x,y) = 1 + p^2;\quad F(x,y) = p\cdot q;\quad G(x,y) = 1 + q^2. \tag{5.51}$$

Prin urmare, aria infinitezimală $d\sigma$ a unei suprafaţe netede reprezentată cartezian explicit de ecuaţia (5.22) este

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy. \tag{5.52}$$

Definiţia 5.1.12 *Mărimea $d\sigma$ din expresia* (5.47), *respectiv* (5.52), *se numeşte* **element de arie** *al suprafeţe* $(\mathcal{S})$ *calculat în punctul* M *al ei reprezentată parametric prin ecuaţiile* (5.4), *respectiv cartezian explicit prin ecuaţia* (5.22).

Definiţia 5.1.13 *Funcţiile reale* E, F, G, *calculate după legea* (5.48) *când* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată parametric, sau după legea* (5.51) *dacă* $(\mathcal{S})$ *este dată prin ecuaţia carteziană explicită, se numesc* **coeficienţii lui Gauss** *sau* **coeficienţii primei forme fundamentale** *a suprafeţei netede* $(\mathcal{S})$.

Pentru a vedea semnificaţia primei forme fundamentale a unei suprafeţe netede, considerăm un drum oarecare (curbă) (γ) pe suprafaţă care trece prin punctul $M(x, y, z)$ cu coordonatele date de (5.4), unde $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$. Elementul de arc ds al acestei curbe în punctul M este

$$ds = \|d\mathbf{r}(u, v)\| = \sqrt{d\mathbf{r}(u, v) \cdot d\mathbf{r}(u, v)}.$$

Având în vedere expresia analitică a diferenţialei

$$d\mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)dv,$$

calculând pătratul scalar al acesteia şi ţinând cont de notaţiile (5.48) – (5.50), constatăm că

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2. \tag{5.53}$$

Definiţia 5.1.14 *Relaţia* (5.53) *se numeşte* **prima formă fundamentală** *a unei suprafeţe.*

Observaţia 5.1.10 *Pătratul elementului de arc,* ds^2, *este formă pătratică în variabilele* du *şi* dv, *iar determinantul matricei coeficienţilor este*

$$E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v) = \Big\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \Big\|^2. \tag{5.54}$$

Observaţia 5.1.11 *Relaţia* (5.54) *şi condiţia de regularitate* (5.5) *arată că* ds^2 *este* **formă pătratică pozitiv definită**.

Definiţia 5.1.15 *Fie o suprafaţă netedă* $(\mathcal{S})$, $M_0 \in \mathcal{S}$, (γ_1), (γ_2) *două curbe situate pe suprafaţă şi* $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ *versorii tangentelor în punctul comun* M_0 *la respectiv curbele* (γ_1) *şi* (γ_2). *Se numeşte* **unghiul dintre curbele** (γ_1) **şi** (γ_2), *unghiul* $\varphi \in [0, \pi]$ *dintre* $\boldsymbol{\tau}_1$ *şi* $\boldsymbol{\tau}_2$.

Cosinusul unghiului φ este dat de relaţia

$$\cos\varphi = \frac{d\mathbf{r}(u_0, v_0) \cdot \delta\mathbf{r}(u_0, v_0)}{\|d\mathbf{r}(u_0, v_0)\| \, \|\delta\mathbf{r}(u_0, v_0)\|}, \tag{5.55}$$

unde diferenţialele vectorului de poziţie a punctului M_0 în lungul fiecăreia dintre cele două curbe sunt

$$\begin{cases} d\mathbf{r}(u_0, v_0) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)du + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)dv, \\ \delta\mathbf{r}(u_0, v_0) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\delta u + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\delta v. \end{cases} \tag{5.56}$$

Înlocuind (5.56) în (5.55) şi folosindu–ne de expresiile coeficienţilor lui Gauss în punctul $M_0'(u_0, v_0)$, deducem

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \tag{5.57}$$

Presupunem că cele două curbe în discuţie mai sus sunt liniile parametrice care trec prin M_0. Atunci, pe prima linie avem $dv = 0$, iar pe cea de a doua $\delta v = 0$, încât din (5.57) deducem că unghiul dintre liniile parametrice este astfel încât

$$\cos\varphi = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)\, G(u_0, v_0)}}. \tag{5.58}$$

Două curbe trasate pe suprafaţa $(\mathcal{S})$ de ecuaţie vectorială (5.3), care trec prin punctul $M_0 \in (\mathcal{S})$, sunt ortogonale dacă

$$E(u_0, v_0)du\delta u + F(u_0, v_0)(du\delta v_0 + dv\delta u_0) + G(u_0, v_0)dv\delta v_0 = 0. \tag{5.59}$$

Observaţia 5.1.12 *Să considerăm pânza parametrică din Exemplul* 5.1.1. *Constatăm că*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = 0,$$

ceea ce înseamnă că cel de al doilea coeficient al lui Gauss este nul în orice punct $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. *Folosind* (5.58) *şi* (5.59) *deducem că liniile*

parametrice ale sferei sunt ortogonale. Aceste linii parametrice sunt, pe de o parte, cercul paralel obţinut când $v = const.$ şi, pe de altă parte, meridianul care se obţine luând $u = const.$.

Exerciţiul 5.1.1 *Fie suprafaţa $(\mathcal{S})$ din $I\!R^3$ de ecuaţie vectorială*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = (u\cos v + \sin v)\,\mathbf{i} + (u\sin v - \cos v)\,\mathbf{j} + (u - v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in I\!R^2.$$

Să se arate că în toate punctele suprafeţei există un plan tangent unic şi să se scrie ecuaţia vectorială, ecuaţiile parametrice şi ecuaţia carteziană implicită ale planului tangent la suprafaţă în punctul $M_0 \in (\mathcal{S})$ corespunzătoare valorilor $u = \dfrac{\pi}{3}$, $v = 0$ ale parametrilor u şi v. Să se determine coeficienţii lui Gauss şi prima formă fundamentală întrun punct curent M al suprafeţei.

Soluţie. Funcţia $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(\mathbf{R^2}, \mathbf{R^3})$ care defineşte suprafaţa $(\mathcal{S})$ este diferenţiabilă, prin urmare $(\mathcal{S})$ este o suprafaţă netedă în $I\!R^3$. Apoi, matricea jacobiană a aplicaţiei $\mathbf{r}$ este

$$J_{\mathbf{r}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v + \cos v \\ \sin v & u\cos v + \sin v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dacă se calculează funcţiile $A,\ B,\ C$, se găseşte:

$$A = -u\cos v - 2\sin v; \quad B = -u\sin v - 2\cos v; \quad C = u.$$

Observăm că $A^2 + B^2 + C^2 = 2u^2 + 4 > 0, \quad (\forall)\,, (u,v) \in I\!R^2$, deci în orice punct al suprafeţei există un plan tangent unic determinat.

Ecuaţia vectorială a planului tangent în M_0 este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\frac{\pi}{3}, 0) + (\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})\Big(J_{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{3}, 0)\begin{pmatrix} t - \dfrac{\pi}{3} \\ s \end{pmatrix}\Big).$$

Dacă se efectuează înlocuirile cerute se găseşte

$$\mathbf{r} = \frac{\pi}{3}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\pi}{3}\mathbf{k} + (\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})\begin{pmatrix} t - \dfrac{\pi}{3} + s \\ \dfrac{\pi}{3}s \\ t - s - \dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Egalând coordonatele corespunzătoare ale vectorilor din cei doi membri ai ecuaţiei vectoriale a planului tangent în punctul M_0 găsim că ecuaţiile parametrice ale acestuia sunt

$$\begin{cases} x &= t+s \\ y &= \dfrac{\pi}{3}-1 \\ z &= t-s, \quad (t,s)\in I\!R^2. \end{cases}$$

Ecuaţia carteziană implicită a planului tangent în M_0 se obţine eliminând parametrii t şi s din ecuaţiile parametrice de mai sus. Se găseşte că această ecuaţie este

$$\pi\, x - 6\, y - \pi\, z - 6 = 0.$$

Folosind Observaţia 5.1.8 constatăm că coeficienţii lui Gauss sunt:

$$E(u,v)=2;\quad F(u,v)=0;\quad G(u,v)=2+u^2,\quad (u,v)\in I\!R^2,$$

iar forma întâia fundamentală a suprafeţei este

$$ds^2 = 2\,du^2 + (2+u^2)\,dv^2.$$

■

Exerciţiul 5.1.2 *Să se arate că planul tangent întrun punct curent al suprafeţei*

$$(\mathcal{S})\ z = f(x,y) = x\,\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big),\quad x\neq 0,$$

unde φ este o funcţie reală derivabilă pe un interval real, trece prin originea reperului din $\mathcal{E}_3$.

Soluţie. Dacă notăm coordonatele punctului curent al planului tangent cu X, Y, Z, atunci ecuaţia planului tangent în punctul $M(x,y,x\,\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big))$ al suprafeţei date este

$$(X-x)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (Y-y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - (Z - f(x,y)) = 0.$$

Trebuiesc calculate derivatele parţiale ale funcţiei f care defineşte suprafaţa. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big) - \frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big);\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Înlocuind aceste valori ale derivatelor parţiale în ecuaţia planului tangent găsim

$$\Big(\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)-\frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big)X+\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)\,Y-Z=0.$$

Oricare din aceste plane trece prin originea reperului deoarece coordonatele acesteia $(0,0,0)$ verifică ecuaţia planului indiferent de punctul $M(x,y,z)$ al suprafeţei. ■

Definiţia 5.1.16 *O porţiune* $(\mathcal{S})$ *de suprafaţă netedă se numeşte* **suprafaţă orientabilă**, *dacă în fiecare punct al ei normala este bine determinată şi, pornind dintr–un punct al suprafeţei pe o curbă închisă cu o anumită orientare a normalei, ajungem în acel punct cu aceeaşi orientare a normalei. Faţa care corespunde sensului pozitiv al normalei se numeşte* **faţa pozitivă** *a suprafeţei. O suprafaţă orientabilă se numeşte şi* **suprafaţă cu două feţe** *sau* **suprafaţă bilateră**.

Cea mai simplă suprafaţă cu două feţe este planul. *Cuadricele* (elipsoidul, hiperboloizii, paraboloizii, cilindri pătratici, conurile pătratice, perechile de plane) sunt suprafeţe orientabile. Când suprafaţa este închisă, deci când este frontiera unui domeniu spaţial mărginit, ea este orientabilă cele două feţe ale sale numindu–se *faţa exterioară* şi *faţa interioară*. Dacă suprafaţa $(\mathcal{S})$ are reprezentarea carteziană explicită (5.22), prin definiţie faţa pozitivă a sa este aceea pentru care normala orientată întrun punct al ei face unghi ascuţit cu versorul $\mathbf{k}$. În acest caz feţei pozitive i se spune şi *faţă superioară*.

Există suprafeţe cu *o singură faţă* care se mai numesc *suprafeţe neorientabile* sau *suprafeţe unilatere*; banda lui Möbius este un exemplu de *suprafaţă cu o singură faţă*.

5.2 Aria unei suprafeţe netede

Din geometria elementară se cunosc ariile domeniilor plane cu frontiere poligoane, a cercului şi ariile unor figuri geometrice de rotaţie (con, cilindru, sferă, zonă sferică, calotă sferică). Cu ajutorul calculului integral am extins această noţiune şi am arătat cum se calculează aria oricărui domeniu determinat de curbe plane închise, care au arie. Pentru definirea ariei unei porţiuni de suprafaţă oarecare, pornind pe calea urmată la calculul lungimii unui arc regulat de curbă prin considerarea liniilor poligonale înscrise în curbă, ar trebui să considerăm suprafeţe poliedrale înscrise în porţiunea de suprafaţă

dată. După cum a arătat Schwarz printr–un exemplu (cizma lui Schwarz), această cale nu duce întotdeauna la rezultat. De aceea, pentru introducerea noţiunii de arie a unei porţiuni de suprafaţă netedă procedăm după cum urmează.

Să considerăm o suprafaţă netedă pozitiv orientată $(\mathcal{S})$ dată cartezian explicit de ecuaţia (5.22) şi să notăm cu (Γ) curba care mărgineşte $(\mathcal{S})$. Fie D interiorul domeniului de definiţie al funcţiei f din (5.22) şi γ frontiera acestuia. Mulţimile D şi γ sunt proiecţiile ortogonale ale lui $(\mathcal{S})$ şi respectiv Γ pe planul Oxy.

Să împărţim suprafaţa $(\mathcal{S})$ în patrulatere curbilinii (S_{ij}) cu ajutorul unor curbe coordonate de forma $x = x_i =$ const., $i = \overline{1,m}$, şi $y = y_j =$ const., $j = 1, n$. Aceste curbe sunt intersecţiile suprafeţei cu plane paralele la planele de coordonate Oyz şi Oyz. Evident,

$$(S_{ij}) = \{(x,y,z) \in (\mathcal{S}) :\ x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1},\ z = f(x,y)\}.$$

Proiecţia D_{ij} a porţiunii (S_{ij}) din suprafaţa (S) pe planul Oxy este

$$D_{ij} = \{(x,y) \in D :\ x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1},$$

unde $1 \le i \le m-1, 1 \le j \le n-1\}$.

Fie $M_{ij}(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))$ un punct arbitrar aparţinând patrulaterului curbiliniu (S_{ij}) şi $M'_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$ proiecţia acestui punct pe planul Oxy. Notăm cu T_{ij} porţiunea din planul tangent la suprafaţă în punctul M_{ij} care se proiectează în planul Oxy pe dreptunghiul, eventual curbiliniu, D_{ij}. Din geometria elementară se cunoaşte relaţia:

$$\operatorname{aria} D_{ij} = \operatorname{aria} T_{ij}\, \cos\gamma_{ij}, \tag{5.60}$$

unde $\gamma_{ij} \in [0, \pi/2)$ este unghiul dintre normala la faţa pozitivă a suprafeţei $(\mathcal{S})$ în punctul M_{ij} şi versorul $\mathbf{k}$ al axei Oz. Am arătat în paragraful precedent că

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_j) + q^2(\xi_i, \eta_j)}} \tag{5.61}$$

unde, conform notaţiilor lui Monge,

$$p(\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_j); \quad q(\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_j).$$

O valoare aproximativă a ariei porţiunii netede $(\mathcal{S})$ de suprafaţă este

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \text{aria}\, T_{ij}. \tag{5.62}$$

Folosind (5.60) în (5.62) constatăm că

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cos\gamma_{ij}}\, \text{aria}\, D_{ij}. \tag{5.63}$$

Având în vedere (5.61) rezultă că expresia lui Ω_{mn} din (5.63) se poate scrie în forma

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{1+p^2(\xi_i,\eta_j)+q^2(\xi_i,\eta_j)}\, \text{aria}\, D_{ij}. \tag{5.64}$$

Observaţia 5.2.1 *Membrul doi al relaţiei* (5.64) *este o sumă integrală Riemann a funcţiei* $F(x,y)=\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}$ *corespunzătoare modului de divizare*

$$\Delta_{mn} = \{D_{11}, D_{12}, \cdots, D_{ij}, \cdots, D_{mn}\} \tag{5.65}$$

şi alegerii punctelor intermediare $(\xi_i,\eta_j)\in D_{ij}$.

Definiţia 5.2.1 *Se numeşte* **aria** *suprafeţei netede* $(\mathcal{S})$ *numărul real*

$$\text{aria}\, S = \lim_{\nu_{mn}\to 0} \Omega_{mn}. \tag{5.66}$$

Teorema 5.2.1 *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este netedă şi este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia* (5.22), *atunci ea are arie şi aria sa este dată de formula*

$$\text{aria}\, S = \iint_D \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\, dxdy. \tag{5.67}$$

Demonstraţie. Deoarece am considerat că suprafaţa $(\mathcal{S})$ este netedă, rezultă că funcţia f din (5.22) este continuu diferenţiabilă pe D ceea ce atrage că funcţia

$$F(x,y) = \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}$$

este continuă pe D şi, drept urmare, limita din membrul al doilea al relaţiei (5.66) este integrala dublă pe D din funcţia $F(x,y)$, astfel că vom putea scrie (5.67) şi teorema este demonstrată. ■

Observaţia 5.2.2 *Formula de calcul* (5.67) *a ariei suprafeţei netede* ($\mathcal{S}$) *poate fi scrisă şi în forma*

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\cos\gamma}. \tag{5.68}$$

Exemplul 5.2.1 *Să se determine aria suprafeţei tăiată din* **paraboloidul hiperbolic** $z = xy$ *de* **cilindrul circular** $x^2 + y^2 = R^2$.

Soluţie. Funcţia f care defineşte cartezian explicit porţiunea de suprafaţă decupată de cilindru în paraboloidul hiperbolic dat este $f(x, y) = xy$, domeniul ei de definiţie D fiind discul închis de rază R cu centrul în origine, situat în planul Oxy. Aşadar,

$$f : D \subset I\!\!R^2,\; f(x, y) = xy,\;\; (x, y) \in D,$$

unde domeniul D este definit de

$$D = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \;\; x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

Constatăm că porţiunea ($\mathcal{S}$) din paraboloidul hiperbolic aflat în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ este o suprafaţă netedă, prin urmare aria sa va fi calculată cu ajutorul formulei (5.67). Avem $p = y$, $q = y$ astfel că aria lui ($\mathcal{S}$) este

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy. \tag{5.69}$$

Pentru calculul acestei integrale duble, trecem la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta, \\ y = \rho\,\sin\theta. \end{cases} \tag{5.70}$$

Perechea (x, y) aparţine domeniului de integrare D dacă şi numai dacă perechea (ρ, θ) din (5.70) aparţine intervalului bidimensional $[0, R] \times [0, 2\pi)$. Atunci, (5.70) stabileşte o transformare punctuală regulată între intervalul bidimensional $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi)$ şi discul D. Ştiind că jacobianul transformării punctuale regulate (5.70) este egal cu ρ, prin aplicarea formulei schimbării de variabile în integrala dublă (5.69), găsim

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_\Omega \rho\sqrt{1 + \rho^2}\, d\rho d\theta.$$

Integrala dublă pe un interval bidimensional se calculează simplu, astfel că

$$\begin{aligned}\text{aria}\,\mathcal{S} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \pi\int_0^R (1+\rho^2)^{1/2}(1+\rho^2)'d\rho = \\ = \frac{2\pi}{3}\Big((1+R^2)^{3/2}-1\Big)\end{aligned},$$

deoarece o primitivă a funcţiei $(1+\rho^2)^{1/2}(1+\rho^2)'$ este $\dfrac{2}{3}\,(1+\rho^2)^{3/2}$. ■

Teorema 5.2.2 *Dacă* $(\mathcal{S})$ *este o suprafaţa netedă reprezentată prin ecuaţia vectorială* (5.3), *sau prin ecuaţiile parametrice* (5.4), *atunci* $(\mathcal{S})$ *are arie şi*

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_A \sqrt{E(u,v)\,G(u,v) - F^2(u,v)}\,dudv, \tag{5.71}$$

unde E, F *şi* G *sunt coeficienţii lui Gauss* (5.48) – (5.50).

Demonstraţie. Presupunem că normala la suprafaţa $(\mathcal{S})$ este dată de (5.43), unde în membrul doi s–a luat semnul plus. Atunci,

$$\cos\gamma = \frac{C(u,v)}{\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}}. \tag{5.72}$$

Să considerăm sistemul format de primele două ecuaţii ale sistemului (5.4), adică

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \quad (u,v)\in A. \tag{5.73}$$

Presupunând că parametrizarea suprafeţei netede $(\mathcal{S})$ este astfel încât

$$C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0, \;\; (u,v)\in \mathring{A}, \tag{5.74}$$

deducem că (5.73) este o transformare punctuală regulată între mulţimea A şi o mulţime $D \subset I\!R^2$ care este mulţimea perechilor $(x,y)\in I\!R^2$, unde x şi y sunt daţi de (5.73). Atunci, (5.73) poate constitui o schimbare de variabile în integrala dublă.

În formula de calcul (5.68) a ariei suprafeţei efectuăm schimbarea de variabile (5.73). Folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă găsim

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_{A} \frac{1}{\cos\gamma}\Big|\frac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)}(u,v)\Big|\,dudv. \tag{5.75}$$

Din (5.74) şi (5.72) în (5.75) rezultă că formula de calcul a ariei unei suprafeţe netede date parametric este

$$\begin{aligned}\text{aria}\,\mathcal{S} &= \iint\limits_{A} \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}dudv = \\ &= \iint\limits_{A} \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|\,dudv.\end{aligned} \tag{5.76}$$

Pe de altă parte,

$$\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)} = \sqrt{E(u,v)\,G(u,v)-F^2(u,v)}. \tag{5.77}$$

Concluzia (5.71) a teoremei rezultă acum din (5.76) şi (5.77). ∎

Exemplul 5.2.2 *Să se determine aria suprafeţei de rotaţie*

$$(\mathcal{S}): \quad x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u), \tag{5.78}$$

unde $(u,v)\in D=[u_1,u_2]\times[0,2\pi)$ *şi* f *este o funcţie derivabilă.*

Soluţie. Suprafaţa de rotaţie $(\mathcal{S})$ este o suprafaţă netedă. Pentru a aplica formula (5.71), calculăm coeficienţii lui Gauss. Pentru aceasta, efectuăm derivatele funcţiilor din (5.78). Avem:

$$\begin{cases} x'_u(u,v) = \cos v; & x'_v(u,v) = -u\sin v; \\ y'_u(u,v) = \sin v; & y'_v(u,v) = u\cos v; \\ z'_u(u,v) = f'(u); & z'_v(u,v) = 0. \end{cases} \tag{5.79}$$

Coeficienţii $E(u,v)$, $F(u,v)$ şi $G(u,v)$ se calculează cu ajutorul derivatelor parţiale din (5.79). Se găseşte

$$\begin{cases} E(u,v) = (x'_u(u,v))^2+(y'_u(u,v))^2+(z'_u(u,v))^2 = \\ \qquad = 1+(f'(u))^2, \\ F(u,v) = x'_u(u,v)\,x'_v(u,v)+y'_u(u,v)\,y'_v(u,v)+ \\ \qquad + z'_u(u,v)\,z'_v(u,v) = 0, \\ G(u,v) = (x'_v(u,v))^2+(y'_v(u,v))^2+(z'_v(u,v))^2 = u^2. \end{cases} \tag{5.80}$$

Formula de calcul (5.71), în care folosim (5.80), conduce la

$$\operatorname{aria}\mathcal{S} = \iint\limits_{D} \sqrt{u^2(1+f'^2(u))}\,dudv = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} |u|\sqrt{1+f'^2(u)}\,du. \tag{5.81}$$

Presupunem că $[u_1, u_2] \subset (0, +\infty)$ şi că funcţia f are derivata pozitivă. Folosind ca variabilă cota z, vom avea

$$u = \varphi(z), \quad z \in [z_1, z_2], \quad \varphi'(z) = \frac{1}{f'(u)},$$

astfel că formula de calcul (5.81) a ariei suprafeţei de rotaţie (5.78) devine

$$\operatorname{aria}\mathcal{S} = 2\pi\int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\sqrt{1+(\varphi'(z))^2}\,dz$$

şi este aceeaşi cu cea dedusă la aplicaţiile integralei definite. ∎

Teorema 5.2.3 *Aria unei suprafeţe netede* $(\mathcal{S})$ *nu depinde de reprezentarea sa parametrică.*

Demonstraţie. Fie suprafaţa $(\mathcal{S})$ dată parametric de (5.4) şi transformarea punctuală regulată bijectivă

$$\begin{cases} u = \lambda(u', v'), \\ v = \mu(u', v'), \end{cases} \quad (u', v') \in D' \tag{5.82}$$

de la mulţimea D' la mulţimea A, unde frontiera lui D' este o curbă netedă pe porţiuni, funcţiile λ şi μ sunt continue şi cu derivate parţiale continue, iar jacobianul

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}(u', v') \neq 0, \quad \text{pe} \quad D'.$$

Obţinem în acest fel o nouă reprezentare parametrică a lui $(\mathcal{S})$ şi anume

$$\begin{cases} x = \varphi(u', v') = x(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ y = \psi(u', v') = y(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ z = \chi(u', v') = z(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \end{cases} \quad (u', v') \in D'. \tag{5.83}$$

Dacă notăm:

$$A' = \frac{D(\psi,\chi)}{D(u',v')}(u',v'); \quad B' = \frac{D(\chi,\varphi)}{D(u',v')}(u',v'); \quad C' = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u',v')}(u',v'),$$

atunci au loc următoarele egalităţi:

$$A' = A\,\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}; \quad B' = B\,\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}; \quad C' = C\,\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')} \tag{5.84}$$

şi deci

$$\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)} =$$

$$= \frac{\sqrt{A'^2(u',v')+B'^2(u',v')+C'^2(u',v')}}{\Big|\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}(u',v')\Big|}.$$

Folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obţinem

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_{A} \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,dudv =$$

$$\iint\limits_{D'} \frac{\sqrt{A'^2(u',v')+B'^2(u',v')+C'^2(u',v')}}{\Big|\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}(u',v')\Big|}\Big|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}(u',v')\Big|du'dv' = \tag{5.85}$$

$$= \iint\limits_{D'} \sqrt{A'^2(u',v')+B'^2(u',v')+C'^2(u',v')}\,du'dv'$$

şi teorema este demonstrată. ■

5.3 Integrala de suprafaţă de primul tip

Fie $(\mathcal{S})$ o suprafaţă netedă mărginită de o curbă netedă pe porţiuni L. Este posibil însă ca $(\mathcal{S})$ să fie o suprafaţă închisă şi deci nu are frontieră. Considerăm o funcţie mărginită $f(M)$ definită în punctele unui domeniu din spaţiu care conţine suprafaţa $(\mathcal{S})$. Fie

$$\Delta = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_n\} \tag{5.86}$$

o *partiţie* sau *diviziune* a suprafeţei $(\mathcal{S})$ obţinută prin trasarea pe suprafaţă a anumitor curbe din două familii de curbe distincte. Întrucât suprafaţa $(\mathcal{S})$ este netedă pe porţiuni, ea are arie. Fiecare din suprafeţele componente ale partiţiei are arie şi deci se poate vorbi de numărul real pozitiv $\nu(\Delta)$ sau $\|\Delta\|$, cel mai mare dintre numerele pozitive aria $\mathcal{S}_i$ pe care îl vom numi *norma partiţiei* Δ. În fiecare parte $\mathcal{S}_i$ alegem un punct M_i, numit *punct intermediar*, şi formăm *suma integrală*

$$\sigma_\Delta(f;M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\text{aria}\,\mathcal{S}_i \tag{5.87}$$

asociată funcţiei f, modului de divizare Δ şi alegerii punctelor intermediare $M_i \in \mathcal{S}_i$.

Definiţia 5.3.1 *Funcţia f este* **integrabilă** *pe suprafaţa netedă $\mathcal{S}$ dacă există un număr $I \in I\!\!R$ cu proprietatea că $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)\,\Delta$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi $M_i \in \mathcal{S}_i$,*

$$|\sigma_\Delta(f,M_i) - I| < \varepsilon. \tag{5.88}$$

Numărul I se numeşte **integrala de suprafaţă de primul tip** *din funcţia f pe suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ şi se notează*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} f(M)\,d\sigma, \tag{5.89}$$

unde $d\sigma$ este **elementul de arie** *al suprafeţei $\mathcal{S}$.*

Poziţia punctului curent $M \in \mathcal{S}$ poate fi determinată prin specificarea coordonatelor carteziene ale sale x, y şi z. Atunci, valoarea $f(M)$ a funcţiei f în punctul $M \in \mathcal{S}$ poate fi notată în forma $f(x,y,z)$ şi ca urmare integrala de suprafaţă de tipul întâi a funcţiei f pe suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ se poate scrie ca

$$I = \iint\limits_{S} f(x,y,z)\,d\sigma. \tag{5.90}$$

De menţionat că dacă folosim notaţia (5.90) pentru integrala de suprafaţă I, trebuie să avem în vedere că variabilele x, y şi z sunt legate între ele prin condiţia de apartenenţă la suprafaţa $(\mathcal{S})$ a punctului $M(x,y,z)$. Integrala de suprafaţă de tipul întâi din funcţia f pe suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ poate fi numită simplu *integrala funcţiei f pe suprafaţa $\mathcal{S}$*.

Observaţia 5.3.1 *Presupunând că* $(\mathcal{S})$ *este o suprafaţă materială de densitate* $f(x,y,z)$, *integrala funcţiei* f *pe suprafaţa* $(\mathcal{S})$, *dacă există, este egală cu masa suprafeţei sau pânzei materiale* $\mathcal{S}$. *Dacă* f *reprezintă densitatea de repartiţie a unei sarcini electrice, integrala lui* f *pe suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este sarcina electrică totală distribuită pe* $\mathcal{S}$.

După definiţia integralei de suprafaţă de tipul întâi se impune să studiem existenţa acesteia precum şi modalităţile de calcul ale ei.

La ambele aspecte se poate răspunde dacă reducem integrala de suprafaţă de tipul întâi la o integrală dublă.

Pentru început, considerăm cazul când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată cartezian explicit, iar proiecţia sa pe planul Oxy este un domeniu închis şi mărginit.

Teorema 5.3.1 *Dacă* $(\mathcal{S})$ *este suprafaţa netedă*

$$z = z(x,y), \qquad (x,y) \in D, \tag{5.91}$$

şi $f(x,y,z)$ *este o funcţie mărginită definită în punctele unui domeniu tridimensional care conţine suprafaţa* $\mathcal{S}$, *atunci are loc relaţia*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,d\sigma \;=\; \iint\limits_{D} f\Big(x,y,z(x,y)\Big)\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dxdy \tag{5.92}$$

oride câte ori integralele care apar în aceasta există. Integrala de suprafaţă din relaţia (5.92) *există dacă integrala dublă din membrul drept al egalităţii există.*

Demonstraţie. Fie Δ o partiţie a suprafeţei de forma (5.86). Proiectând această partiţie în planul Oxy obţinem o partiţie $\widetilde{\Delta}$ a domeniului D în părţile carabile D_1, D_2, $\cdots$, D_n, fiecare din părţile D_i având o arie care nu o întrece pe cea a suprafeţei $\mathcal{S}_i$ corespunzătoare.

Considerăm suma integrală (5.87) în care punctul intermediar $M_i \in \mathcal{S}_i$ va avea coordonatele $M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i,\eta_i))$. Corespunzător punctului $M_i \in \mathcal{S}_i$ în planul Oxy vom avea punctul $M_i'(\xi_i,\eta_i)$ care va aparţine domeniului D_i.

Din paragraful precedent ştim că aria porţiunii $\mathcal{S}_i$ de suprafaţă este dată de integrala dublă

$$\text{aria}\,\mathcal{S}_i \;=\; \iint\limits_{D_i} \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dxdy, \tag{5.93}$$

unde p şi q sunt notaţiile lui Monge pentru derivatele de ordinul întâi în raport cu x şi respectiv y ale funcţiei $z = z(x, y)$ din (5.91). Aplicând teorema de medie integralei duble din (5.93), obţinem

$$\text{aria}\,\mathcal{S}_i \;=\; \sqrt{1 + p^2(\xi_i^*, \eta_i^*) + q^2(\xi_i^*, \eta_i^*)}\,\text{aria}\,D_i, \tag{5.94}$$

unde (ξ_i^*, η_i^*) este un punct aparţinând domeniului D_i. În consecinţă, suma integrală (5.87) poate fi scrisă în forma

$$\begin{gathered}\sigma_\Delta(f; M_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\,\sqrt{1 + p^2(\xi_i^*, \eta_i^*) + q^2(\xi_i^*, \eta_i^*)}\,\text{aria}\,D_i\end{gathered} \tag{5.95}$$

care nu diferă cu mult de suma integrală Riemann a funcţiei reale de două variabile reale

$$\begin{gathered}F : D \to I\!R^2, \quad F(x, y) = \\ = f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)},\end{gathered} \tag{5.96}$$

ceea ce o deosebeşte de o asemenea sumă integrală fiind faptul că în membrul doi din (5.95) nu apare peste tot aceleaşi puncte intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Să punem în evidenţă suma integrală în care să apară aceleaşi puncte intermediare. Avem

$$\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\Delta}}(f; M_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\,\sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_i) + q^2(\xi_i, \eta_i)}\,\text{aria}\,D_i. \tag{5.97}$$

Să arătăm că această sumă integrală, notată simplu cu $\widetilde{T}$, diferă foarte puţin de suma integrală (5.95) pe care o vom renota cu T.

Datorită faptului că suprafaţa $(\mathcal{S})$ este netedă, funcţia reală de două variabile reale

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}, \quad (x, y) \in D \tag{5.98}$$

este continuă pe mulţimea compactă $D \subset I\!R^2$, deci va fi uniform continuă. În consecinţă, dat orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$\left|\sqrt{1 + p^2(x_1, y_1) + q^2(x_1, y_1)} - \sqrt{1 + p^2(x_2, y_2) + q^2(x_2, y_2)}\right| < \varepsilon \tag{5.99}$$

dacă cel mai mare dintre diametrele subdomeniilor D_i este mai mic decât δ_1. Prin ipoteză, funcţia $f(x, y, z)$ este mărginită, adică

$$|f(x, y, z)| \leq K = \text{ constant} \tag{5.100}$$

şi prin urmare relaţiile (5.99) şi (5.100) implică inegalitatea

$$|T - \widetilde{T}| \leq K\,\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\, S_i = K\,\varepsilon\, \text{aria}\, \mathcal{S}, \tag{5.101}$$

unde $T = \sigma_{\Delta}(f; M_i)$, iar $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\Delta}}(f; M_i)$.

Acum putem completa uşor demonstraţia teoremei. Dacă integrala din membrul drept al relaţiei (5.92) există, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_2 > 0$ astfel că pentru orice sumă integrală $\widetilde{T}$ corespunzătoare unei partiţii $\{D_i :\ i = \overline{1, n}\}$ a domeniului D ale cărei elemente au diametrele mai mici decât δ_2 avem egalitatea

$$\Big| \iint\limits_{D} f\Big(x, y, z(x, y)\Big) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dxdy - \widetilde{T}\Big| < \varepsilon. \tag{5.102}$$

Să luăm numărul $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ şi să considerăm partiţiile

$$\{\Sigma_i :\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

ale suprafeţei $(\mathcal{S})$ pentru care diametrele tuturor elementelor Σ_i sunt mai mici decât δ. Notăm prin $\{D_i :\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ partiţiile domeniului D corespunzătoare partiţiilor $\{\Sigma_i :\ i = 1, 2, \cdots, n\}$. Atunci, diametrul fiecărui subdomeniu D_i este mai mic decât δ şi, în consecinţă, inegalităţile (5.101) şi (5.102) sunt satisfăcute. Aceste inegalităţi implică

$$\begin{gathered} \Big| \iint\limits_{D} f\Big(x, y, z(x, y)\Big)\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}dxdy - T\Big| < \\ < \varepsilon(1 + K \text{aria}\, \mathcal{S}) \end{gathered} \tag{5.103}$$

pentru orice partiţie a suprafeţei $(\mathcal{S})$ a cărei fineţe este suficient de mică.

Rezultă că limita sumelor integrale T există şi este egală cu integrala din relaţia (5.103). ■

Corolarul 5.3.1 *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este netedă şi funcţia* $f(x, y, z)$ *este continuă, există integrala de suprafaţă din membrul stâng al relaţiei* (5.92).

Demonstraţie. Întradevăr, în ipotezele menţionate, integrantul membrului drept al relaţiei (5.92) este o funcţie continuă, deci integrala dublă din acest membru există şi astfel integrala de suprafaţă din membrul întâi există. ■

Observaţia 5.3.2 *După cum se ştie*

$$\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)} = \frac{1}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})},$$

unde $\mathbf{n}$ *este normala la faţa superioară a suprafeţei* $\mathcal{S}$. *Această relaţie face ca formula de calcul a unei integrale de suprafaţă de tipul întâi când suprafaţa este dată cartezian explicit prin ecuaţia*

$$z = z(x,y), \;\; (x,y) \in D \tag{5.104}$$

să se scrie în forma

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f\Big(x, y, z(x,y)\Big) \frac{dxdy}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})}. \tag{5.105}$$

Dacă suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ *este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia*

$$x = x(y,z), \;\; (y,z) \in D_1, \tag{5.106}$$

putem schimba rolurile variabilelor x, y *şi* z *şi să scriem relaţia*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f\Big(x(y,z), y, z\Big) \frac{dydz}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})}, \tag{5.107}$$

unde D_1 *este proiecţia suprafeţei* $(\mathcal{S})$ *pe planul* Oyz. *Similar, în cazul că suprafaţa netedă* $(\mathcal{S})$ *este dată prin ecuaţia*

$$y = y(z,x), \;\; (z,x) \in D_2, \tag{5.108}$$

are loc egalitatea

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f\Big(x, y(z,x), z\Big) \frac{dzdx}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})}, \tag{5.109}$$

unde D_2 *este proiecţia suprafeţei* $(\mathcal{S})$ *pe planul* Ozx.

Observaţia 5.3.3 *Presupunem că suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este reuniune finită de suprafeţe netede de tipurile* (5.104), (5.106) *şi* (5.108). *Atunci, integrala de suprafaţă de tipul întâi din funcţia* f *pe suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *se va scrie ca o sumă de integrale de suprafaţă de tipul întâi din* f *ale căror formule de calcul vor fi, după caz,* (5.105), (5.107) *şi* (5.109).

În cazul când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată parametric printr–o ecuaţie vectorială, putem aplica raţionamentul din paragraful precedent şi, prin schimbări adecvate de variabile, oricare din integralele duble (5.105), (5.107), (5.109) se transformă întro integrală dublă pe domeniul de variaţie al parametrilor curbilinii u şi v ai suprafeţei. Suntem conduşi astfel la teorema care dă formula de calcul a integralei de suprafaţă dintr–o funcţie continuă f pe o suprafaţă $(\mathcal{S})$ reprezentată parametric.

Teorema 5.3.2 *Dacă* $(\mathcal{S})$ *este o suprafaţă netedă reprezentată prin ecuaţia vectorială*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in \Delta \subset I\!R^2, \tag{5.110}$$

unde $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$, *şi* f *o funcţie mărginită şi continuă pe un domeniu tridimensional care conţine suprafaţa* $\mathcal{S}$, *atunci* f *este integrabilă pe* S *în raport cu elementul de arie al suprafeţei şi are loc relaţia*

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,d\sigma = \\ =&\iint\limits_{\Delta} f\Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\Big)\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\,dudv.\end{aligned} \tag{5.111}$$

În formula de calcul (5.111) Δ este domeniul plan de variaţie al parametrilor curbilinii ai suprafeţei, iar E, F, G sunt coeficienţii lui Gauss calculaţi pentru suprafaţa $(\mathcal{S})$ din (5.110). Ştim că

$$d\sigma = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\,dudv \tag{5.112}$$

reprezintă elemntul de arie al suprafeţi $(\mathcal{S})$ dată parametric şi deci pentru a scrie formula de calcul (5.111) a integralei de suprafaţă din membrul întâi înlocuim mai întâi variabilele x, y, z ale funcţiei de integrat f cu expresiile lor ca funcţii de parametri curbilinii ai suprafeţei $(\mathcal{S})$ aşa cum rezultă ele din (5.110), înmulţim apoi rezultatul cu radicalul care apare în elementul de

suprafaţă $d\sigma$, calculat după legea (5.112), şi integrăm pe domeniul plan Δ funcţia de variabilele u şi v astfel obţinută.

Formulele (5.92), (5.105), (5.107) şi (5.109) sunt cazuri particulare ale formulei de calcul (5.111). Se poate arăta că aceste formule rămân valabile când suprafaţa nu este netedă dar este netedă pe porţiuni.

Exemplul 5.3.1 *Să se calculeze integrala de suprafaţă de tipul întâi*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, d\sigma,$$

unde $(\mathcal{S})$ *este elipsoidul*

$$(\mathcal{S}):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Soluţie. Pentru suprafaţa $(\mathcal{S})$ avem reprezentarea parametrică:

$$x = a\, \sin\theta\, \cos\varphi;\quad y = b\, \sin\theta\, \sin\varphi;\quad x = a\, \cos\theta,$$

unde parametrii curbilinii θ şi φ parcurg intervalele:

$$\theta \in [0, \pi];\quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dacă se calculează coeficienţii lui Gauss pentru elipsoidul scris parametric şi apoi elementul de arie al acestuia se găseşte

$$d\sigma = abc\sqrt{\frac{\sin^2\theta\, \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\, \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Valoarea funcţiei de integrat în punctele suprafeţei este

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^4}{c^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta\, \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\, \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

Aceste calcule, împreună cu (5.111), conduc la

$$I = 8abc \iint\limits_{\Delta} \Big(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big) \sin\theta d\theta\, d\varphi,$$

unde $\Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ adică Δ este un interval bidimensional. Aplicând formula de calcul a integralei duble pe un interval bidimensional, găsim

$$I = \frac{4}{3}\pi\, abc\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big).$$

Să observăm că dacă $a = b = c = R$, ceea ce este echivalent cu a spune că suprafaţa este acum sfera de rază R cu centrul în origine, valoarea integralei corespunzătoare devine $4\pi\, R$ funcţia de integrat fiind funcţia constantă egală cu inversul razei. ■

Exemplul 5.3.2 *Evaluaţi integrala de suprafaţă de tipul întâi*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z)\, d\sigma,$$

unde $(\mathcal{S})$ *este porţiunea din suprafaţa* $z = 4 - x^2 - y^2$ *situată în semispaţiul superior.*

Soluţie. Suprafaţa $(\mathcal{S})$ este o porţiune din paraboloidul de revoluţie obţinut prin rotaţia în jurul axei Oz a parabolei de ecuaţii:

$$z = 4 - x^2; \quad y = 0$$

situată în planul Ozx, cu vârful $V(0, 0, 4)$ punct de maxim. Cum textul problemei se referă la porţiunea din semispaţiul superior a acestui paraboloid, deducem că ecuaţia suprafeţei $(\mathcal{S})$ este

$$(\mathcal{S}): \qquad z \;=\; 4 - x^2 - y^2, \qquad (x, y) \in D,$$

unde D este discul închis cu centrul în origine de rază $R = 2$ situat în planul Oxy, prin urmare

$$D \;=\; \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \;\; x^2 + y^2 - 4 \le 0\}.$$

Elementul de arie $d\sigma$ al suprafaţă date este

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Urmează că integrala de suprafaţă se va calcula cu ajutorul formulei (5.92) astfel că avem:

$$I = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy =$$
$$= 4 \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy.$$

Pentru a calcula ultima integrală dublă folosim coordonatele polare ρ şi θ, unde $x = \rho\cos\theta$ şi $y = \rho\sin\theta$. Se constată că $(x, y) \in D$ dacă şi numai dacă (ρ, θ) aparţine intervalului bidimensional $[0, 2] \times [0, 2\pi)$. Ştiind că jacobianul transformării punctuale regulate folosite la schimbarea de variabile de acest tip este ρ, avem

$$I = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho.$$

Evaluând integralele de mai sus determinăm I şi găsim că valoarea integralei de suprafaţă date este $I = 2\pi(17\sqrt{17} - 1)/3$. ∎

5.4 Aplicaţii în inginerie ale integralelor de suprafaţă de primul tip

Integralele de suprafaţă de primul tip sunt frecvent întâlnite în probleme ale fizicii. De exemplu, întâlnim astfel de integrale când ne ocupăm cu determinarea masei unei *pânze materiale*. O pânză materială este ansamblu dintre o suprafaţă $(\mathcal{S})$ netedă sau netedă pe porţiuni, numită *configuraţia pânzei*, şi o funcţie pozitivă ρ definită şi continuă în punctele suprafeţei $(\mathcal{S})$, care se numeşte *densitatea de materie* sau *densitatea pânzei materiale*. Tot cu ajutorul integralelor de suprafaţă de tipul întâi se exprimă centrul de greutate al pânzei materiale ca şi momentele de inerţie ale acesteia în raport cu elementele reperului $Oxyz$. O pânză materială poate fi notată prin $\{\mathcal{S}, \rho\}$ sau, atunci când densitatea materială se desprinde din context, se scrie doar configuraţia pânzei. O pânză materială se numeşte *omogenă* dacă densitatea sa este funcţia constantă şi *neomogenă* în caz contrar.

Întrucât procedeul care se aplică pentru a determina masa, centrul de greutate şi momentele de inerţie în raport cu elementele reperului ale pânzei materiale este asemănător cu cel aplicat firului material pentru determinarea aceloraşi mărimi, vom scrie direct rezultatele.

Masa $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ a pânzei materiale $\{\mathcal{S}, \rho\}$ este

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\, d\sigma. \tag{5.113}$$

Cantitatea infinitezimală

$$dm = \rho(x,y,z)d\sigma. \tag{5.114}$$

se numeşte *element de masă* al pânzei materiale $\{\mathcal{S}, \rho\}$ în $M(x,y,z) \in \mathcal{S}$.

Folosind elementul de masă, masa pânzei materiale se scrie

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} dm.$$

Coordonatele centrului de greutate G sunt date de

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} x\rho(x,y,z)d\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)d\sigma}, \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} y\rho(x,y,z)d\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)d\sigma},$$

$$z_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} z\rho(x,y,z)d\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)d\sigma}.$$

Expresiile coordonatelor centrului de greutate al pânzei se pot scrie simplificat dacă folosim elementul de masă introdus în (5.114). Avem

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} x\, dm}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} dm}; \quad y_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} y\, dm}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} dm}; \quad z_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} z\, dm}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} dm}. \tag{5.115}$$

În particular, pentru o pânză materială omogenă, vom avea

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} x\, d\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} d\sigma}; \quad y_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} y\, d\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} d\sigma}; \quad z_G = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} z\, d\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} d\sigma}. \tag{5.116}$$

Momentele de inerţie ale pânzei materiale $\mathcal{S}$ în raport cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz le vom nota respectiv prin I_x I_y şi I_z şi au expresiile:

$$I_x = \iint\limits_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)dm; \quad I_y = \iint\limits_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2)dm; \quad I_z = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)dm. \tag{5.117}$$

Când densitatea materială este constantă şi egală cu $\rho_0 > 0$, formulele de mai sus devin

$$\begin{gathered} I_x = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)d\sigma, \quad I_y = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2)d\sigma; \\ I_z = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)d\sigma. \end{gathered} \tag{5.118}$$

Momentele de inerţie ale pânzei materiale $\mathcal{S}$ în raport cu planele de coordonate Oxy, Oyz, Ozx, notate corespunzător cu I_{xy}, I_{yz} şi I_{zx}, au expresiile date de integralele de suprafaţă de tipul întâi

$$\begin{gathered} I_{xy} = \iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 dm, \ I_{yz} = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 dm, \\ I_{xz} = \iint\limits_{\mathcal{S}} y^2 dm. \end{gathered} \tag{5.119}$$

Dacă pânza materială are densitatea constantă ρ_0, în locul formulelor (5.119) avem

$$I_{xy} = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 d\sigma; \quad I_{yz} = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 d\sigma; \quad I_{xz} = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} y^2 d\sigma. \tag{5.120}$$

În fine, momentul de inerţie în raport cu originea reperului este

$$I_O = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)dm, \tag{5.121}$$

când pânza materială este neomogenă, iar în cazul că ar fi omogenă acelaşi moment de inerţie al pânzei va fi dat de expresia

$$I_O = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma. \tag{5.122}$$

În scopul de a prezenta încă o aplicaţie a integralelor de suprafaţă de primul tip să introducem noţiunea de *funcţie vectorială integrabilă pe o suprafaţă*. Fie în acest sens

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k} \tag{5.123}$$

o funcţie vectorială definită întrun domeniu tridimensional care conţine suprafaţa $\mathcal{S}$. Prin definiţie, vom spune că funcţia $\mathbf{F}$ este *integrabilă* pe $\mathcal{S}$ dacă fiecare din componentele sale este funcţie intyegrabilă pe $\mathcal{S}$. În această situaţie introducem *integrala de suprafaţă de tipul întâi a funcţiei vectoriale* $\mathbf{F}$ *pe suprafaţa* $\mathcal{S}$ prin

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(M)\, d\sigma = \mathbf{i} \iint\limits_{\mathcal{S}} P(M)\, d\sigma + \mathbf{j} \iint\limits_{\mathcal{S}} Q(M)\, d\sigma + \mathbf{k} \iint\limits_{\mathcal{S}} R(M)\, d\sigma. \tag{5.124}$$

Valoarea unei astfel de integrale este un vector. Existenţa integralei de suprafaţă de primul tip a unei funcţii vectoriale $\mathbf{F}$, reducerea ei la o integrală dublă dintr–o funcţie vectorială precum şi proprietăţile unei integrale de tipul (5.124) sunt cercetate în strânsă legătură cu integralele de suprafaţă care apar în membrul al doilea al relaţiei (5.124).

Ca aplicaţie a acestei noţiuni să găsim *forţa de atracţie gravitaţională* cu care o pânză materială *atrage* un punct material.

Fie $\rho(x, y, z)$ densitatea pânzei materiale $\mathcal{S}$ şi μ_0 o masă concentrată în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparţine suprafeţei. După legea atracţiei universale a lui Newton, forţa elementară de atracţie dintre elementul de masă dm al suprafeţei $\mathcal{S}$ şi punctul material M_0 cu ponderea μ_0 este

$$d\mathbf{F} = \gamma\, \mu_0\, dm\, \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{5.125}$$

În formula (5.125) γ este constanta gravitaţională a cărei valoare numerică depinde de alegerea sistemului de unităţi de măsură, iar $\mathbf{r}$ este vectorul $\overrightarrow{M_0M}$, unde $M(x, y, z)$ reprezintă punctul curent al suprafeţei de pondere egală cu masa elementară dm dată de (5.114). Forţa rezultantă $\mathbf{F}$ de atracţie a punctului material M_0 de către întreaga suprafaţă $\mathcal{S}$ este suma forţelor elementare (5.125), fapt care ne duce la concluzia că $\mathbf{F}$ este integrala de suprafaţă

$$\mathbf{F} = \gamma\, \mu_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, d\sigma. \tag{5.126}$$

Deoarece avem $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0)\,\mathbf{i} + (y - y_0)\,\mathbf{j} + (z - z_0)\,\mathbf{k}$, expresia forţei de atracţie poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \gamma\,\mu_0\Big(\mathbf{i}\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\frac{x - x_0}{r^3}\,d\sigma +\\ +\mathbf{j}\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\frac{y - y_0}{r^3}\,d\sigma + \mathbf{k}\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\frac{z - z_0}{r^3}\,d\sigma\Big).\end{aligned} \tag{5.127}$$

Integralele din (5.127) există dacă densitatea materială este funcţie continuă, iar suprafaţa $\mathcal{S}$ este netedă sau netedă pe porţiuni.

Analiza aplicaţiilor de mai sus conduce la o concluzie importantă din care vom desprinde o proprietate specifică integralelor de suprafaţă de tipul întâi. Să pornim de la observaţia că elementul de integrare, înţelegând prin aceasta expresia

$$f(M)\,d\sigma,$$

depinde numai de mărimea elementului de arie $d\sigma$ şi de valoarea funcţiei f în punctul curent M al suprafeţei $\mathcal{S}$, însă este independentă de orientarea elementului de suprafaţă în raport cu spaţiul înconjurător. Această observaţie se desprinde foarte bine din toate aplicaţiile prezentate mai sus căci masa unui element din suprafaţa materială $\{\mathcal{S}, \rho\}$ sau forţa cu care acest element de masă atrage un punct material nu se modifică dacă ne mutăm de pe o faţă a suprafeţei pe cealaltă. În concluzie, putem afirma că integrala de suprafaţă de tipul întâi nu depinde de orientarea suprafeţei fapt pe care îl putem exprima matematic prin

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}^-} f(x,y,z)\,d\sigma. \tag{5.128}$$

Există probleme de alt gen în care orientarea suprafeţei şi deci a elementului său de arie $d\sigma$ joacă un rol important. O astfel de problemă, pe care o vom analiza ulterior, este calculul debitului unui fluid printr–o suprafaţă dar, vom vedea că există şi altele. Aceste probleme conduc la un alt gen de integrale de suprafaţă, aşa numitele *integrale de suprafaţă de tipul al doilea* de care ne vom ocupa în paragraful următor.

Exemplul 5.4.1 *Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa Oz a pânzei materiale omogene având densitatea egală cu unitatea şi configuraţia semisfera*

$$(\mathcal{S}): \qquad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Soluţie. Conform celor prezentate mai sus, avem

$$I_z = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

Pentru calculul acestei integrale de suprafaţă de tipul întâi putem utiliza o reprezentare parametrică a semisferei $\mathcal{S}$ şi anume cea în care parametrii curbilinii ai suprafeţei să fie colatitudinea θ şi longitudinea φ :

$$x = R\,\sin\theta\,\cos\varphi;\quad y = R\,\sin\theta\,\sin\varphi;\quad z = R\,\cos\theta,$$

unde parametrii (θ, φ) variază în intervalul bidimensional $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi)$.

Coeficienţii lui Gauss pentru sfera reprezentată parametric ca mai sus sunt:

$$E(\theta,\varphi) = R^2;\quad F(\theta,\varphi) = 0;\quad G(\theta,\varphi) = R^2 \sin^2\theta.$$

Elementul de arie al suprafeţei exprimat cu ajutorul parametrilor curbilinii θ şi φ este

$$d\sigma = R^2\,\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Valorile pe semisferă ale funcţiei de integrat sunt date de

$$x^2 + y^2 = (R\,\sin\theta\,\cos\varphi)^2 + (R\,\sin\theta\,\sin\varphi)^2 = R^2 \sin^2\theta,$$

astfel că momentul de inerţie de determinat este

$$I_z = R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta = 2\,\pi\, R^4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta.$$

Ultima integrală se scrie ca diferenţă de alte două care se calculează simplu şi se găseşte $I_z = 4\,\pi\, R^4/3$. ■

5.5 Integrale de suprafaţă de al doilea tip

Să considerăm pentru început o problemă concretă care sugerează introducerea noţiunii de *integrală de suprafaţă de al doilea tip* şi anume problema determinării cantităţii de fluid care străbate în unitatea de timp o suprafaţă orientată $\mathcal{S}$ a cărei normală este

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + \mathbf{j}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + \mathbf{k}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k}) = n_1\,\mathbf{i} + n_2\,\mathbf{j} + n_3\,\mathbf{k}. \qquad (5.129)$$

Fie că spaţiul ambiant în care se află suprafaţa orientată $\mathcal{S}$ este plin cu un fluid în mişcare. O particulă oarecare a fluidului, aflată la momentul t în poziţia $M(x,y,z)$, are viteza

$$\mathbf{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}, \tag{5.130}$$

unde $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ şi $R = R(x,y,z)$ sunt mărimile algebrice ale proiecţiilor vectorului $\mathbf{V}$ pe respectiv versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ şi $\mathbf{k}$.

Considerăm un element infinitezimal de arie $d\sigma$ de pe acea faţa a suprafeţei $\mathcal{S}$ care are normala $\mathbf{n}$. Cantitatea de fluid $d\Phi$ care trece prin $d\sigma$ în unitatea de timp, deci un flux, este egală cu $V_n\,d\sigma$ unde V_n este mărimea algebrică a proiecţiei vectorului viteză pe direcţia normalei $\mathbf{n}$ la $d\sigma$. Cum vectorul pe care se proiectează viteza este versor, rezultă că $V_n = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ astfel că fluxul elementar este

$$d\Phi = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = (P\,n_1 + Q\,n_2 + R\,n_3)d\sigma. \tag{5.131}$$

Formula (5.131) dă *fluxul elementar* de fluid prin elementul de suprafaţă de normală $\mathbf{n}$. Pentru a obţine debitul total sau *fluxul total*, adică cantitatea de lichid care strabate suprafaţa $\mathcal{S}$ în unitatea de timp, ar trebui să sumăm expresiile (5.131) relativ la toate elementele de suprafaţă $d\sigma$, fapt ce conduce la integrala

$$\Phi = \iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,n_1 + Q\,n_2 + R\,n_3\Big)\,d\sigma. \tag{5.132}$$

Dacă privim atent constatăm că ceea ce am obţinut în (5.132) nu este altceva decât integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei

$$P(x,y,z)\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + Q(x,y,z)\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + R(x,y,z)\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k}) \tag{5.133}$$

pe suprafaţa $\mathcal{S}$. Imediat însă trebuie să precizăm faptul că integrantul depinde de funcţia vectorială $\mathbf{V}$ din (5.130) şi că , lucru foarte important, a fost implicată o anumită faţă a suprafeţei, anume aceea care are normala $\mathbf{n}$ dată în (5.129).

Putem trece acum să formulăm definiţia generală a integralei de suprafaţă de tipul al doilea.

Fie în acest sens $\mathcal{S}$ o suprafaţă netedă cu două feţe. Fixăm o anumită parte a suprafeţei echivalent cu a spune că alegem una din cele două posibilităţi de alegere a normalei $\mathbf{n}$ în punctul M. În acelaşi punct M, dar pe

cealaltă parte a suprafeţei, normala este $-\mathbf{n}$ Considerăm o funcţie vectorială $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ definită pe un domeniu tridimensional în care se află suprafaţa $\mathcal{S}$ şi continuă în punctele suprafeţei. Notăm cu F_n mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale a vectorului $\mathbf{F}$ pe direcţia normalei $\mathbf{n}$ în punctul M. Avem

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \tag{5.134}$$

unde $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ sunt coordonatele versorului normalei $\mathbf{n}$ în punctul $M(x, y, z)$ de pe faţa aleasă a suprafeţei $\mathcal{S}$.

Integrala

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\Big)\, d\sigma \tag{5.135}$$

se va numi *integrala de suprafaţă de tipul al doilea a funcţiei vectoriale* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *pe faţa suprafaţei* $\mathcal{S}$ *de normală* $\mathbf{n}$ şi va fi notată cu

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy. \tag{5.136}$$

Astfel, prin definiţie, avem relaţia

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =\\ =&\iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\Big)\, d\sigma.\end{aligned} \tag{5.137}$$

Dacă notăm cu $\mathcal{S}^+$ faţa aleasă a suprafeţei, evident cealaltă faţă a sa va avea normala $-\mathbf{n}$ şi o putem nota cu $\mathcal{S}^-$. Din modul cum a fost introdusă integrala de suprafaţă de tipul al doilea rezultă că ea depinde de orientarea suprafeţei şi ca atare putem scrie

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =\\ =-&\iint\limits_{\mathcal{S}^-} Pdydz + Qdzdx + R\,dxdy.\end{aligned} \tag{5.138}$$

Observaţia 5.5.1 *Dacă $d\sigma$ este elementul infinitezimal de arie al suprafeţei $\mathcal{S}^+$, expresiile*

$$\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})d\sigma, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{j})d\sigma, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{k})d\sigma$$

sunt, respectiv, proiecţiile elementului de arie $d\sigma$ pe planele de coordonate Oyz, Ozx, Oxy. Dacă considerăm că $d\sigma$ se proiectează pe planele de coordonate în intervale bidimensionale cu laturi infinitezimale, ariile acestora sunt respectiv $dydz$, $dzdx$ şi $dxdy$, astfel că putem scrie egalităţile

$$\begin{gathered}\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})d\sigma = dydz, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{j})d\sigma = dzdx,\\ \cos(\mathbf{n},\mathbf{k})d\sigma = dxdy\end{gathered} \tag{5.139}$$

şi totodată putem justifica notaţia (5.136) *pentru integrala de suprafaţă de tipul întâi particulară* (5.135).

Observaţia 5.5.2 *Am definit integrala de suprafaţă de speţa a doua cu ajutorul integralei de primul tip. Însă integrala de suprafaţă de tipul al doilea, la fel ca celelalte integrale, poate fi definită direct cu ajutorul sumelor integrale.*

În cele ce urmează prezentăm formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea când suprafaţa este reprezentată prin ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D, \tag{5.140}$$

unde D este un domeniu plan care are arie. Fie că faţa aleasă a suprafeţei este $\mathcal{S}^+$ şi că această faţă corespunde normalei

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|} = \mathbf{i}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + \mathbf{j}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + \mathbf{k}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k}). \tag{5.141}$$

Conform celor prezentate mai sus avem mai întâi că integrala de suprafaţă pe faţa $\mathcal{S}^+$ a suprafeţei $\mathcal{S}$ se calculează cu ajutorul integralei de suprafaţă de tipul întâi prin

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =\\ = \iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})\Big)\,d\sigma.\end{gathered} \tag{5.142}$$

Din expresia (5.141) rezultă că putem scrie versorul normalei $\mathbf{n}$ şi în forma

$$\mathbf{n} = \frac{A(u,v)\,\mathbf{i} + B(u,v)\,\mathbf{j} + C(u,v)\,\mathbf{k}}{\sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}}, \tag{5.143}$$

unde funcţiile $A(u,v)$, $B(u,v)$ şi $C(u,v)$ sunt jacobienii

$$\begin{gathered} A(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u,v),\;\; B(u,v) = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(u,v), \\ C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v). \end{gathered} \tag{5.144}$$

Dacă mai ţinem cont şi de faptul că elementul de arie are expresia

$$d\sigma = \|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\, dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv, \tag{5.145}$$

în final rezultă că integrala de suprafaţă de tipul doi se determină prin formula de calcul

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{D} \Big(P\, A + Q\, B + R\, C\Big)\, dudv, \tag{5.146}$$

unde prin funcţiile P, Q şi R din membrul al doilea înţelegem

$$\begin{cases} P &= P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \\ Q &= Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \\ R &= R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{cases} \tag{5.147}$$

iar A, B şi C sunt funcţiile din (5.144).

Dacă folosim relaţiile (5.134) şi (5.141), integrala de suprafaţă de tipul al doilea se poate scrie vectorial după cum urmează

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{5.148}$$

unde în integrala a doua nu s–a mai scris $\mathcal{S}^+$ acest fapt subânţelegându–se odată cu precizarea normalei $\mathbf{n}$ a suprafeţei.

Dacă dorim să scriem formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea, pornind de la scrierea sa ca în membrul doi din (5.148), trebuie evaluată valoarea funcţiei de integrat în punctele suprafeţei. Găsim

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\Big|_{\mathcal{S}} = \frac{\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|} = \frac{(\mathbf{F},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}. \tag{5.149}$$

În (5.149) intră produsul mixt al vectorilor $\mathbf{F}=(P,Q,R)$, $\mathbf{r}_u$ şi $\mathbf{r}_v$, însă trebuie precizat că este vorba de valoarea pe $\mathcal{S}$ a vectorului $\mathbf{F}$, ceea ce înseamnă că funcţiile P, Q şi R sunt cele din (5.147).

Luând acum în calcul (5.149) şi expresia (5.145) a elementului de arie $d\sigma$ al suprafeţei $\mathcal{S}$, deducem că formula de calcul a integralei de suprafaţă de al doilea tip, scrisă în forma din membrul doi al relaţiei (5.148), este

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \iint\limits_{D} (\mathbf{F},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)\,dudv. \tag{5.150}$$

Dacă ţinem cont de exprimarea analitică a unui produs mixt prin determinantul de ordinul trei care are pe linii coordonatele a respectiv celor trei vectori în ordinea în care apar în produs rezultă că formula de calcul (5.150) se poate scrie în forma finală

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\,dudv. \tag{5.151}$$

Pentru a scrie încă o formă a integralei de suprafaţă de al doilea tip, introducem noţiunea de *element orientat de arie* notat cu $d\boldsymbol{\sigma}$ şi exprimat prin

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\,d\sigma. \tag{5.152}$$

Atunci, integrala de suprafaţă de tipul al doilea se poate scrie simplu

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{5.153}$$

În cazul în care suprafaţa netedă este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia

$$(\mathcal{S}):\quad z=f(x,y),\qquad (x,y)\in D\subset Oxy, \tag{5.154}$$

şi considerăm că faţa $\mathcal{S}^+$ a sa este cea superioară, versorul normalei este

$$\mathbf{n} = \frac{-p\,\mathbf{i} - q\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{5.155}$$

unde p şi q sunt notaţiile lui Monge pentru derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f în punctul curent interior suprafeţei $(\mathcal{S}^+)$.

În acest caz, abscisa x şi ordonata y ale oricărui punct de pe suprafaţă pot fi considerate drept parametri curbilinii ai suprafeţei $\mathcal{S}^+$ astfel că se poate scrie ecuaţia sa vectorială

$$(\mathcal{S}^+):\quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}, \qquad (x,y)\in D. \tag{5.156}$$

Atunci, formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea din câmpul vectorila $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ pe faţa superioară a suprafeţei (5.154) este uşor de obţinut din cazul general (5.151) luând drept u pe x şi drept v pe y. Avem în final

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{D} \Big(-pP(x,y,f(x,y)) - qQ(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y))\Big)dxdy. \tag{5.157}$$

Dacă faţa suprafeţei $\mathcal{S}$ este cea inferioară $\mathcal{S}^-$, formula de calcul este

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^-} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} =$$
$$\iint\limits_{\mathcal{S}^-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{D} \Big(p\,P(x,y,f(x,y)) + q\,Q(x,y,f(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\Big)dxdy. \tag{5.158}$$

Observaţia 5.5.3 *Urmând un raţionament asemănător celui care ne–a condus la formulele* (5.157) *şi* (5.158)*, se pot obţine formulele de calcul ale integralei de suprafaţă de tipul al doilea din câmpul vectorial* $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ *când suprafaţa* $\mathcal{S}$ *este reprezentată cartezian explicit fie prin ecuaţia* $x = g(y,z)$ *fie prin ecuaţia* $y = h(z,x)$*.*

Spre exemplu, dacă $\mathcal{S}$ are ecuaţia $x = g(y,z)$ şi $\mathcal{S}^+$ este faţa dinspre partea pozitivă a axei Ox, formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea din câmpul $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ pe suprafaţa $\mathcal{S}^+$ este

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} =$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}} \Big(P(g(y,z),y,z) - \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)Q(g(y,z),y,z) -$$

$$-\frac{\partial g}{\partial z}(y,z)R(g(y,z),y,z)\Big)dydz,$$

unde D_{yz} reprezintă proiecţia suprafeţei $\mathcal{S}^+$ pe planul Oyz fiind totodată şi domeniul de definiţie al funcţiei g.

Exemplul 5.5.1 *Să se calculeze valoarea integralei de suprafaţă de tipul al doilea*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z\,dxdy,$$

unde $\mathcal{S}$ este faţa exterioară a sferei de rază R cu centrul în origine.

Soluţie. Ecuaţia sferei de rază R cu centrul în origine este

$$(\mathcal{S}):\quad F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Utilizând cunoştinţele din primul paragraf al acestui capitol găsim că versorul normalei exterioare în punctul $M(x,y,z)$ al sferei $\mathcal{S}$ este

$$\mathbf{n} = \frac{(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)}{\|\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)\|} = \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{R}.$$

Atunci, integrala de tipul al doilea de calculat se transformă în integrala de suprafaţă de tipul întâi

$$I = \frac{1}{R}\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^3 + y^3 + z^2)\,d\sigma$$

iar pentru a reduce pe aceasta la o integrală dublă folosim reprezentarea parametrică a sferei în care parametri curbilinii sunt colatitudinea θ şi longitudinea φ

$$x = R\,\sin\theta\,\cos\varphi, \quad y = R\,\sin\theta\,\sin\varphi, \quad z = R\,\cos\theta.$$

Punctul $M(x, y, z)$ descrie sfera de rază R cu centru în origine dacă perechea (θ, φ) aparţine domeniului plan Δ care este intervalul bidimensional $[0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Coeficienţii lui Gauss au fost calculaţi deja în alt exemplu şi am găsit că aceştia sunt:

$$E(\theta, \varphi) = R^2; \quad F(\theta, \varphi) = 0; \quad G(\theta, \varphi) = R^2\,\sin^2\theta.$$

Elementul de arie al suprafeţei exprimat cu ajutorul parametrilor curbilinii θ şi φ este

$$d\sigma = R^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

iar valorile pe sferă ale funcţiei de integrat sunt date de

$$(x^3 + y^3 + z^2)\Big|_{\mathcal{S}} = R^2(R\,\sin^3\theta\,\cos^3\varphi + R\,\sin^3\theta\,\sin^3\varphi + \cos^2\theta).$$

Scriind formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul întâi şi aplicând totodată formula de calcul a integralei duble pe intervalul bidimensional Δ, vom avea

$$I = R^4 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (R\,\sin^3\theta\,\cos^3\varphi + R\,\sin^3\theta\,\sin^3\varphi + \cos^2\theta)\sin\theta\,d\varphi.$$

Integralele:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\,d\varphi; \qquad \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi\,d\varphi$$

sunt nule, după cum se constată simplu, iar

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{3}\,\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

astfel că integrala de suprafaţa dată are valoarea $4\pi R^4/3$. ■

Exemplul 5.5.2 *Un fluid oarecare curge în spaţiu cu viteza*

$$\mathbf{V}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Să se găsească fluxul total Φ al fluidului prin faţa superioară a paraboloidului

$$(\mathcal{S}^+): \quad z = 9 - x^2 - y^2$$

situată în semispaţiul superior $z \geq 0$.

Soluţie. Am văzut că fluxul total al unui fluid cu viteza $\mathbf{V}$ prin faţa $\mathcal{S}^+$ a suprafeţei $\mathcal{S}$ este dat de integrala de suprafaţă de tipul al doilea

$$\Phi = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} V_n \, d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

unde $\mathbf{n}$ este normala la faţa superioară a paraboloidului

$$\mathbf{n} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Aplicând formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea dată în (5.157), obţinem

$$\Phi = \iint\limits_{D} \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (5x^2 + 5y^2 + 9) dxdy,$$

unde D este proiecţia suprafeţei pe planul Oxy

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 - 9 \leq 0\}.$$

Integrala dublă o calculăm folosind trecerea la coordonatele polare ρ şi θ unde:

$$x = \rho\,\cos\theta; \quad y = \rho\,\sin\theta, \qquad (\rho, \theta) \in \Delta = [0, 3] \times [0, 2\pi).$$

Având în vedere că jacobianul transformării care se utilizează la schimbarea de variabile de mai sus este egal cu ρ, folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obţinem

$$\Phi = \iint\limits_{\Delta} \rho\,(5\,\rho^2 + 9)\,d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho\,(5\rho^2 + 9)\,d\rho = \frac{567\,\pi}{2}.$$

Valoarea pozitivă a rezultatului arată că fluidul *iese* din suprafaţă şi aceasta se datorează faptului că în fiecare punct de pe faţa $\mathcal{S}^+$ a suprafeţei vectorul viteza fluidului face unghi ascuţit cu versorul normalei la suprafaţă, ca atare particula de fluid aflată instantaneu oriunde pe suprafaţă *iese* din domeniul spaţial limitat de planul Oxy şi de suprafaţa $\mathcal{S}$. ∎

5.6 Formula integrală a lui Stokes

Formula integrală a lui Stokes stabileşte o legătură între integrala de suprafaţă în raport cu coordonatele şi integrala curbilinie de speţa a doua. Ea generalizează formula integrală Riemann–Green, ultima fiind un caz particular a celei dintâi când suprafaţa în chestiune este o parte a planului Oxy. Ca şi formula integrală Riemann–Green, formula integrală a lui Stokes este întâlnită în multe aplicaţii ale analizei matematice în inginerie.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă netedă, bilateră şi orientată, dată de ecuaţia vectorială

$$(\mathcal{S}) : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k}, \tag{5.159}$$

unde $(u, v) \in D$, iar D este un domeniu compact care are arie. Suprafaţa $\mathcal{S}$ fiind orientată, rezultă că versorul normalei $\mathbf{n}$ la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul curent $(u, v) \in D$ este bine precizat. Fie că faţa aleasă a suprafeţei este cea care corespunde normalei (5.141). Mulţimea punctelor $(u, v) \in D$ este mulţimea punctelor din interiorul unei curbe închise γ şi de pe această curbă. Presupunem că frontiera γ a mulţimii D este reprezentată parametric prin ecuaţiile

$$(\gamma) : \quad u \ = \ u(t), \quad v \ = \ v(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{5.160}$$

Frontiera Γ a suprafeţei $\mathcal{S}$ dată prin (5.159) este tot o curbă închisă şi are ecuaţia vectorială

$$(\Gamma) : \quad \mathbf{r} \ = \ \mathbf{r}(u(t), v(t)), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{5.161}$$

Pe curba Γ introducem o orientare pe care o numim *compatibilă* cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$. În fiecare punct $M \in \Gamma$ considerăm versorul normalei la suprafaţă $\mathbf{n}$ şi, în acelaşi punct, considerăm vectorul $\boldsymbol{\nu}$ cu proprietatea că este perpendicular şi pe $\mathbf{n}$ şi pe Γ şi *intră* în $\mathcal{S}$.

Orientarea de pe curba Γ dată de vectorul $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}$ se numeşte *compatibilă* cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$. Într–un limbaj mai sugestiv, putem spune că orientarea pe Γ compatibilă cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată de un observator care deplasându–se pe Γ are capul spre $\mathbf{n}$ şi lasă la stânga suprafaţa $\mathcal{S}$.

Fie funcţia $P(x, y, z)$ definită şi continuă pe $\mathcal{S}$ având derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $\mathcal{S}$. În aceste condiţii ne propunem să calculăm integrala curbilinie

$$I = \int_\Gamma P(x, y, z)\, dx. \tag{5.162}$$

Având în vedere că Γ are ecuaţia vectorială (5.161), din formula de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea în spaţiu, deducem că integrala I din (5.162) se scrie în forma

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(u(t),v(t)),\psi(u(t),v(t)),\chi(u(t),v(t)))\frac{d\varphi}{dt}(u(t),v(t))dt. \quad (5.163)$$

Dacă se calculează derivata funcţiei compuse $\varphi(u(t),v(t))$ şi se înlocuieşte în (5.163) constatăm că I este integrala curbilinie de tipul al doilea pe curba plană γ

$$I=\int_{\gamma} \widetilde{P}(u,v)\,du+\widetilde{Q}(u,v)\,dv, \quad (5.164)$$

unde am folosit notaţiile:

$$\begin{cases} \widetilde{P}(u,v)=P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v);\\ \widetilde{Q}(u,v)=P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v).\end{cases} \quad (5.165)$$

În planul $O'uv$ aplicăm formula integrală Riemann–Green membrului al doilea al relaţiei (5.164) şi obţinem

$$I=\iint\limits_{D}\Big(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial u}(u,v)\ -\ \frac{\partial\widetilde{P}}{\partial v}(u,v)\Big)\,dudv. \quad (5.166)$$

Folosind (5.165) şi regulile de derivare ale funcţiilor compuse constatăm că derivatele care intră în (5.166) au expresiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{Q}}{\partial u} = \Big(\dfrac{\partial P}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial P}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}+\dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{\partial\chi}{\partial u}\Big) + P\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v};\\ \dfrac{\partial\widetilde{P}}{\partial v} = \Big(\dfrac{\partial P}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial P}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}+\dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\Big) + P\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}.\end{cases} \quad (5.167)$$

Diferenţa derivatelor din (5.167) conduce la expresia

$$\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial u}(u,v)-\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial v}(u,v)=B\,\frac{\partial P}{\partial z}-C\,\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (5.168)$$

unde B şi C sunt jacobienii:

$$B = \frac{D(\chi,\varphi)}{D(u,v)}(u,v); \qquad C = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v), \tag{5.169}$$

iar funcţia P care apare în (5.167) şi în (5.168) trebuie înţeleasă ca

$$P = P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)). \tag{5.170}$$

În acest fel integrala I din (5.162) devine

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \iint_D \Big(B\,\frac{\partial P}{\partial z} - C\,\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dudv, \tag{5.171}$$

cu menţiunea că funcţia P din membrul al doilea este cea dată în (5.170).

În mod analog se obţin:

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)\,dy = \iint_D \Big(C\,\frac{\partial Q}{\partial x} - A\,\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\,dudv; \tag{5.172}$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)\,dz = \iint_D \Big(A\,\frac{\partial R}{\partial y} - B\,\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\,dudv \tag{5.173}$$

în care funcţiile Q şi R din membrul doi al relaţiei (5.172) şi respectiv (5.173) sunt

$$\begin{aligned} Q &= Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)),\\ R &= R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)), \end{aligned} \tag{5.174}$$

iar A este jacobianul

$$A = \frac{D(\psi,\chi)}{D(u,v)}(u,v). \tag{5.175}$$

Observaţia 5.6.1 *Jacobienii din relaţiile* (5.169) *şi* (5.175) *sunt cei care intră în expresia versorului normalei la suprafaţă care am convenit să fie*

$$\mathbf{n} = \frac{A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}}{\sqrt{E\,G - F^2}}, \tag{5.176}$$

unde funcţiile E, F, G sunt coeficienţii lui Gauss.

Adunând rezultatele (5.171) – (5.173), deducem relaţia

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx\,+\,Q(x,y,z)\,dy\,+\,R(x,y,z)\,dz\,=\\ =&\iint\limits_D\Big(A\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+B\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+C\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\Big)\,dudv.\end{aligned} \tag{5.177}$$

Pe de altă parte, integrala dublă din membrul al doilea al relaţiei (5.177) este o integrală de suprafaţă de tipul al doilea pe faţa suprafeţei $\mathcal{S}$ de normală $\mathbf{n}$ dată în (5.176), şi anume

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy=\\ =&\iint\limits_D\Big(A\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+B\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+C\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\Big)dudv.\end{aligned} \tag{5.178}$$

De notat că funcţiile P, Q şi R, din integralele duble de mai sus, sunt astfel cum au fost precizate prin relaţiile (5.170) şi (5.174).

Cuplând rezultatele din (5.177) şi (5.178) deducem relaţia

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx\,+\,Q(x,y,z)\,dy\,+\,R(x,y,z)\,dz\,=\\ =&\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy\end{aligned} \tag{5.179}$$

care se numeşte *formula integrală a lui Stokes* sau simplu, *formula lui Stokes*.

Ţinând cont că avem relaţiile:

$$dydz=\cos\alpha\,d\sigma;\quad dzdx=\cos\beta\,d\sigma;\quad dxdy=\cos\gamma\,dxdy, \tag{5.180}$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinii directori ai normalei $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n}\;=\;(\cos\alpha)\mathbf{i}+(\cos\beta)\mathbf{j}+(\cos\gamma)\mathbf{k} \tag{5.181}$$

rezultă că formula integrală a lui Stokes (5.179) se scrie în forma echivalentă

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\\ &=\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big(\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\\ &+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big)d\sigma.\end{aligned} \tag{5.182}$$

Fie funcţia vectorială $\mathbf{F}$, de trei variabile reale, definită pe domeniul $V \subset \mathcal{E}_3$

$$\begin{array}{c}\mathbf{F}: V \to I\!R^3, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x,y,z) = \\ = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}\end{array} \tag{5.183}$$

care are proprietatea că funcţia vectorială

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\,\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\,\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathbf{k} \tag{5.184}$$

există şi este continuă cel puţin în punctele suprafeţei $\mathcal{S}$.

Observând că diferenţiala vectorului de poziţie $\mathbf{r}$ este

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} \tag{5.185}$$

şi că produsul scalar al vectorilor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ şi $d\mathbf{r}$ este dat de

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{5.186}$$

deducem că formula integrală a lui Stokes (5.182) se poate scrie sub forma vectorială

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \;\; = \;\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}\, d\sigma. \tag{5.187}$$

Din punct de vedere fizic formula integrală a lui Stokes exprimată prin (5.187) arată că *circulaţia* câmpului vectorial $\mathbf{F}$ pe frontiera Γ a unei suprafeţe orientate $\mathcal{S}$ este egală cu *fluxul rotorului* lui $\mathbf{F}$ prin acea suprafaţă.

Observaţia 5.6.2 *În cazul în care $\mathcal{S}$ este o porţiune D din planul Oxy, iar normala la $\mathcal{S} = D$ este versorul $\mathbf{k}$, formula integrală a lui Stokes* (5.177) *devine formula integrală Riemann–Green.*

Observaţia 5.6.3 *Dacă câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este irotaţional pe V, ceea ce înseamnă că $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, din* (5.187) *deducem că integrala curbilinie de tipul al doilea din funcţia vectorială $\mathbf{F}$ pe orice curbă închisă din V este nulă şi ca atare, expresia diferenţială*

$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{5.188}$$

este o difrenţială totală pe V, adică există funcţia diferenţiabilă U astfel încât

$$dU(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \tag{5.189}$$

Funcţia U din (5.189) se numeşte *primitivă* a expresiei diferenţiale ω. De asemenea, în acest caz integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial $\mathbf{F}$ nu depinde de drumul de integrare.

Formula integrală a lui Stokes se foloseşte în calculul integralei curbilinii pe curba închisă Γ din câmpul vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ când fluxul rotorului lui $\mathbf{F}$ pe o suprafaţă mărginită de acea curbă se calculează mai uşor.

Exerciţiul 5.6.1 *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

de–a lungul curbei determinate de intersecţia suprafeţelor:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx; \quad x^2 + y^2 = 2rx, \quad R > r, \ z \geq 0,$$

sensul de parcurs al curbei Γ fiind cel al acelor de ceasornic dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Ox.

Soluţie. Pentru că integrala curbilinie este complicată, folosim formula integrală a lui Stokes luând ca suprafaţă $\mathcal{S}$ porţiunea din sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$$

situată în semispaţiul superior $z \geq 0$, mărginită de curba Γ şi care conţine puncte $M(x, y, z)$ cu abscisă cuprinsă între 0 şi R.

Având în vedere orientarea curbei Γ, rezultă că normala $\mathbf{n}$ la suprafaţa $\mathcal{S}$ este cea exterioară sferei, această alegere a normalei $\mathbf{n}$ fiind urmare a condiţiei ca Γ să fie orientată compatibil cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$. Suprafaţa $\mathcal{S}$ fiind dată implicit rezultă că normala sa exterioară în punctul $M \in \mathcal{S}$ este , cu plus sau minus, versorul gradientului funcţiei

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rx = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

Se constată că trebuie luat semnul plus astfel că normala $\mathbf{n}$ în punctul M al porţiunii $\mathcal{S}$ din sfera de rază R şi centru în punctul $C(R, 0, 0)$ are cosinii directori:

$$\cos\alpha = \frac{x - R}{R}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{R}; \qquad \cos\gamma = \frac{z}{R}.$$

Rotorul câmpului vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ este

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 2(y - z)\mathbf{i} + 2(z - x)\mathbf{j} + 2(x - y)\mathbf{k}.$$

Aplicând acum formula integrală a lui Stokes, integrala curbilinie I devine

$$I = \frac{2}{R}\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big((y-z)(x-R)+y(z-x)+z(x-y)\Big)d\sigma = 2\iint\limits_{\mathcal{S}}(z-y)d\sigma.$$

Porţiunea $\mathcal{S}$ din sfera de rază R cu centrul în punctul $C(R,0,0)$ are ecuaţia carteziană explicită $z=\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}$, se proiectează în planul Oxy după mulţimea $D=\{(x,y)\in I\!\!R^2:\ x^2+y^2-2rx\le 0\}$ şi are elementul de arie în punctul ei curent $M(x,y,z)$ dat de $d\sigma = \dfrac{R}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}dxdy.$

Conform formulei de calcul a unei integrale de suprafaţă de tipul întâi, integrala de suprafaţă de mai sus se transformă în integrala dublă

$$\begin{aligned} I &= 2R\iint\limits_{D}\Big(1-\frac{y}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}\Big)dxdy \\ &= 2R\iint\limits_{D}dxdy - 2R\iint\limits_{D}\frac{y}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}dxdy. \end{aligned}$$

A doua integrală dublă este egală cu zero deoarece funcţia de integrat este impară în raport cu variabila y, iar doemniul D de integrare este simetric faţă de axa Ox. Prima integrală dublă este aria discului de rază R. Prin urmare, valoarea integralei I este $I=2R\iint\limits_{D}dxdy = 2\pi r^2 R.$ ■

Exerciţiul 5.6.2 *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I=\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

C fiind curba de intersecţie a frontierei cubului $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ cu planul $2(x+y+z)-3a=0$ parcursă în sens direct dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Oz.

Soluţie. Se aplică formula lui Stokes şi se găseşte

$$I=-2\iint\limits_{S}(y+z)dydz+(z+x)dzdx+(x+y)dxdy,$$

unde S este partea de pe faţa superioară a planului $z=3a/2-x-y$ care se proiectează pe planul Oxy în hexagonul de vârfuri $M_1(a,0,0)$, $M_2(a,a/2,0)$, $M_3(a/2,a,0)$, $M_4(0,a,0)$, $M_5(0,a/2,0)$, $M_6(a/2,0,0)$.

Rezultă $I=-9a^3/2.$ ■

Capitolul 6

Integrala triplă

În acest capitol vom defini noţiunea de integrabilitate a unei funcţii reale de trei variabile reale independente şi apoi, legat de aceasta, vom introduce conceptul de *integrala triplă* pe o anumită submulţime a spaţiului aritmetic tridimensional a unei funcţii reale de trei variabile reale definită pe acea mulţime.

Integralele triple sunt aplicate pe scară largă în diverse probleme de fizică, mecanică şi inginerie. Câteva din aceste aplicaţii vor fi prezentate în ultimul paragraf al acestui capitol.

În multe privinţe integralele triple sunt analoage integralelor duble şi, ca urmare, vom omite acele demonstraţii care nu diferă esenţial de demonstraţiile corespunzătoare din capitolul în care s–a studiat integrala dublă.

6.1 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^3$

Mulţimile care vor fi considersate în acest capitol vor fi submulţimi ale spaţiului afin euclidian tri–dimensional $\mathcal{E}_3$, raportat la un reper Cartezian ortogonal $Oxyz$ şi asociat spaţiului liniar $\mathbb{R}^3$. Definiţiile unor noţiuni topologice legate de aceste submulţimi precum: punct interior al unei mulţimi; frontiera unei mulţimi; mulţime deschisă; mulţime închisă; mulţime conexă; domeniu; domeniu închis; diametru unei mulţimi pot fi transpuse uşor mulţimilor incluse în $\mathcal{E}_3$, pornind de la noţiunile topologice similare referitoare la submulţimi ale planului afin euclidian.

Când am introdus integrala dublă am folosit noţiunea de mulţime plană măsurabilă Jordan sau mulţime carabilă şi de arie a acesteia. În mod simi-

lar, definiţia integralei triple se bazează pe noţiunea de *mulţime cubabilă* sau *măsurabilă Jordan* şi de *volumul* unei astfel de submulţimi a spaţiului afin euclidian tridimensional. Pentru aceasta vom porni de la noţiunea de poliedru sau de mulţime poliesdrală şi de volum al acestuia, cunoscute din geometria elementară. Extinderea acestor noţiuni la clase mai largi de mulţimi poate fi efectuată în acelaşi mod în care, plecând de la figuri plane poligonale, au fost introduse noţiunile de mulţime carabilă şi de arie a unei asemenea mulţimi. Vom prezenta pe scurt această extindere.

Un domeniu poliedral sau solid poliedral este o submulţime a lui $\mathcal{E}_3$ a cărei frontieră este o reuniune finită de poligoane. Volumul $V(P)$ a unui solid poliedral este un număr nenegativ care posedă următoarele proprietăţi:

1. (*monotonia*). Dacă P şi Q sunt două solide poliedrale, iar P este inclus în Q, atunci
$$V(P) \leq V(Q);$$
2. (*aditivitatea*). Dacă P şi Q sunt două solide poliedrale fără puncte interioare comune, atunci
$$V(P \cup Q) = V(P) + V(Q);$$
3. (*invarianţa*). Dacă solidele poliedrale P şi Q sunt congruente, volumele lor sunt egale.

Aceste trei proprietăţi se pot păstra când noţiunea de volum se extinde la o clasă mai largă de mulţimi din $\mathcal{E}_3$.

În acest sens, considerăm o mulţime mărginită arbitrară $\Phi \subset \mathcal{E}_3$ şi, totodată, toate corpurile poliedrale scufundate în Φ. Marginea superioară a volumelor solidelor poliedrale scufundate se numeşte **măsura interioară Jordan** a mulţimii Φ. În cazul în care nu există mulţimi poliedrale care să poată fi scufundate în Φ, prin definiţie, atribuim mulţimii Φ măsură interioară Jordan nulă.

În mod similar, se introduce **măsura Jordan superioară** a mulţimii Φ ca fiind marginea inferioară a tuturor solidelor poliedrale cu proprietatea că mulţimea Φ este scufundată în oricare din ele.

Definiţia 6.1.1 *Spunem că o mulţime* $\Phi \subset \mathcal{E}_3$ *este* **măsurabilă Jordan** *sau* **cubabilă** *dacă măsurile Jordan interioară şi exterioară ale acesteia sunt egale. Valoarea comună a acestor măsuri se numeşte* **volumul** *lui* Φ *şi se notează cu* $V(\Phi)$ *sau cu* $vol\,\Phi$.

Teorema următoare se demonstrează la fel cu cea similară pentru cazul mulţimilor plane prezentată în primul paragraf al capitolului în care s–a studiat integrala dublă.

Teorema 6.1.1 *Condiţia necesară şi suficientă ca figura spaţială* Φ *să fie măsurabilă Jordan sau cubabilă este ca pentru orice* $\varepsilon > 0$ *să existe figurile poliedrale* $P \subset \Phi$ *şi* $Q \supset \Phi$ *astfel încât*

$$V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

Definiţia 6.1.2 *Spunem că o mulţime din spaţiu are* **vloumul egal cu zero** *dacă ea poate fi scufundată întrun corp poliedral de volum arbitrar de mic.*

Folosind noţiunea introdusă în definiţia de mai sus, putem reformula Teorema 6.1.1 după cum urmează.

Teorema 6.1.2 *Mulţimea* $\Phi \subset \mathcal{E}_3$ *are volum dacă şi numai dacă frontiera sa are volumul egal cu zero.*

Criteriul care rezultă din Teorema 6.1.2 stabileşte existenţa unor clase largi de submulţimi ale spaţiului $\mathcal{E}_3$ care au volum. Spre exemplu, corpurile compuse dintr–un număr finit de cilindri, având interioare disjuncte două câte două, cu bazele inferioare mulţimi carabile din planul Oxy şi bazele superioare suprafeţe netede descrise de ecuaţii de forma $z = f(x, y)$, formează o astfel de clasă. Volumul fiecărui cilindru component este egal cu integrala dublă

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy,$$

unde D este baza acelui cilindru.

O altă clasă importantă de mulţimi tridimensionale care au volum este alcătuită din mulţimile spaţiului care sunt mărginite de un număr finit de suprafeţe netede. Altfel spus, o mulţime din spaţiu mărginită de o suprafaţă închisă netedă sau netedă pe porţiuni este o mulţime cubabilă. Această afirmaţie se demonstrează asemănător cu afirmaţia că o curbă plană netedă pe porţiuni are aria egală cu zero, dar aplicarea demonstraţiei la cazul corpurilor presupune detalieri complicate care nu au fost prezentate în această lucrare.

Procedând asemănător ca în capitolul în care am studiat integrala dublă putem stabili uşor valabilitatea următoarelor afirmaţii:

1. Reuniunea Φ a două mulţimi măsurabile Jordan Φ_1 şi Φ_2 este o mulţime cubabilă şi, dacă interioarele mulţimilor Φ_1 şi Φ_2 sunt disjuncte, volumul lui Φ este suma volumelor mulţimilor Φ_1 şi Φ_2;
2. Intersecţa a două mulţimi măsurabile Jordan este o mulţime cubabilă.

6.2 Definiţia integralei triple

Fie V un domeniu spaţial mărginit de o suprafaţă netedă sau netedă pe porţiuni şi $f(P) = f(x, y, z)$ o funcţie reală definită şi mărginită pe închiderea mulţimii V. Descompunem domeniul V printr–o reţea de suprafeţe netede pe porţiuni în subdomeniile

$$V_1, \quad V_2, \quad \cdots, V_i, \quad \cdots, V_n \tag{6.1}$$

care nu au puncte interioare în comun şi care satisfac condiţia

$$V \;=\; V_1 \;\cup\; V_2 \;\cup\; \cdots \;\cup\; V_n. \tag{6.2}$$

Definiţia 6.2.1 *Fie V_i mulţimile din* (6.1) *care satisfac* (6.2). *Atunci, mulţimea*

$$\Delta \;=\; \{V_1, \quad V_2, \quad \cdots, V_i, \quad \cdots, V_n\} \tag{6.3}$$

se numeşte **diviziune** *a domeniului V, iar mulţimile V_i se numesc* **elementele diviziunii**.

Definiţia 6.2.2 *Fie diviziunea Δ din* (6.3). *Se numeşte* **norma** *sau* **fineţea** *diviziunii Δ numărul pozitiv $\nu(\Delta)$, sau $\|\Delta\|$, egal cu cel mai mare dintre diametrele elementelor diviziunii Δ.*

Frontiera unui element al diviziunii Δ fiind o suprafaţă închisă netedă pe porţiuni este măsurabilă Jordan. Să notăm cu τ_i volumul elementului V_i şi cu $\mathcal{V}$ volumul lui V. Avem

$$\mathcal{V} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \tau_i.$$

În fiecare element V_i al diviziunii Δ alegem câte un punct $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, numit *punct intermediar*, apoi alcătuim *suma integrală a funcţiei f*

$$\sigma_\Delta(f, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \tau_i \tag{6.4}$$

corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare $P_i \in V_i$.

Definiţia 6.2.3 *Spunem că funcţia* f *este* **integrabilă** *pe mulţimea măsurabilă Jordan* V *dacă există şi este finită limita* I *a sumelor integrale* (6.4), *iar* I *nu depinde de alegerea punctelor intermediare.*

Definiţia 6.2.4 *Dacă* $f : \overline{V} \to I\!\!R$ *este integrabilă pe* $V \subset \mathcal{E}_3$, *numărul*

$$I = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f, P_i)$$

se numeşte **integrala triplă pe domeniul** V **a funcţiei** f *şi se notează cu unul din simbolurile*

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_V f(P)\,dv.$$

Având în vedere definiţia limitei rezultă că putem da o definiţie echivalentă a integrabilităţii funcţiei $f : \overline{V} \to I\!\!R$.

Definiţia 6.2.5 *Funcţia* $f : \overline{V} \to I\!\!R$ *se numeşte* **integrabilă** *pe* $V \subset \mathcal{E}_3$ *dacă există numărul real* I *cu proprietatea că oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât să avem*

$$|\sigma_\Delta(f, P_i) - I| < \varepsilon$$

pentru orice diviziune Δ *cu* $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ *şi pentru orice alegere a punctelor intermediare* $P_i \in V_i$.

6.3 Condiţii de existenţă a unei integrale triple

Ca şi în cazul funcţiilor reale de una sau două variabile independente, o funcţie f arbitrară dar mărginită, de trei variabilele independente x, y şi z, nu este întotdeauna integrabilă pe mulţimea ei de definiţie. Pentru a stabili condiţii suficiente de existenţa a integralei triple pe mulţimea V din funcţia reală f definită pe $\overline{V}$, vom folosi sumele Darboux inferioară şi superioară corespunzătoare diviziunii Δ din (6.3).

Fie $f(x,y,z)$ o funcţie mărginită definită pe o mulţime măsurabilă Jordan V. Notăm cu $\mathcal{D}$ totalitatea diviziunilor mulţimii V şi fie Δ o diviziune a lui V. Funcţia f fiind mărginită pe V va fi mărginită pe elementul V_i al diviziunii

$\Delta \in \mathcal{D}$ şi deci există numerele reale M_i şi m_i marginea superioară şi respectiv marginea inferioară a valorilor funcţiei f pe elementul V_i a diviziunii Δ, iar cu τ_i volumul lui V_i. Expresiile:

$$S_\Delta(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} M_i\,\tau_i; \qquad s_\Delta(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\,\tau_i \tag{6.5}$$

se numesc *suma Darboux superioară* şi respectiv *suma Darboux inferioară* pentru funcţia f corespunzătoare partiţiei Δ.

Proprietăţile sumelor Darboux introduse în (6.5) sunt asemănătoare sumelor Darboux introduse la integrala dublă motiv pentru care ne vom limita doar la enumerarea acestora.

1. Pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}$ şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$, suma integrală asociată funcţiei f este cuprinsă între suma Darboux inferioară şi suma Darboux superioară ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ

$$s_\Delta(f) \;\le\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, S_i \;\le\; S_\Delta(f).$$

2. În procesul de rafinare a divizării mulţimii V sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc. Prin urmare, dacă $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ sunt sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare modului de divizare $\Delta \in \mathcal{D}$, iar $s_{\Delta'}(f)$ şi $S_{\Delta'}(f)$ sunt sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare unei alte partiţii $\Delta' \in \mathcal{D}$, mai fină decât diviziunea Δ, avem

$$s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f).$$

3. Fie Δ' şi Δ'' două diviziuni arbitrare ale mulţimii V şi fie $s_{\Delta'}(f)$, $S_{\Delta'}(f)$ şi $s_{\Delta''}(f)$, $S_{\Delta''}(f)$, sumele Darboux asociate funcţiei f corespunzătoare acestor partiţii. Atunci, avem

$$s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta''}(f) \qquad \text{şi} \qquad s_{\Delta''}(f) \le S_{\Delta'}(f)$$

adică orice sumă Darboux inferioară a funcţiei f corespunzătoare unui mod arbitrar de divizare, nu poate întrece suma Darboux superioară asociată aceleiaşi funcţii corespunzătoare oricărui alt mod de divizare a mulţimii V.

4. Mulţimea sumelor Darboux superioare ale funcţiei f definită pe mulţimea carabilă $V \subset \mathcal{E}_3$ corespunzătoare modurilor de diviziune $\Delta \in \mathcal{D}$ este mărginită inferior. Un minorant al acestei mulţimi este oricare sumă Darboux inferioară a funcţiei f corespunzătoare unui mod de divizare $\Delta \in \mathcal{D}$.

5. Mulţimea sumelor Darboux inferioare ale funcţiei $f : V \to I\!R^3$ corespunzătoare mulţimii modurilor de divizare $\mathcal{D}$ este mărginită superior. Un majorant al acestei mulţimi este desigur oricare sumă Darboux superioară a funcţiei f corespunzătoare oricărui mod de divizare a mulţimii V.

6. Dată funcţia $f : V \subset \mathcal{E}_3 \to I\!R$ există numerele reale:

$$\overline{J} = \inf\{S_\Delta(f) \,:\, \Delta \in \mathcal{D}\}; \qquad \underline{J} = \sup\{s_\Delta(f) \,:\, \Delta \in \mathcal{D}\},$$

numite *integrala Darboux superioară* şi *integrala Darboux inferioară* ale funcţiei $f : V \to I\!R$.

Teorema 6.3.1 *Integralele Darboux inferioară şi superioară ale funcţiei reale de trei variabile reale f definită pe mulţimea măsurabilă Jordan $V \subset I\!R^3$ satisfac inegalitatea*

$$\underline{J} \;\leq\; \overline{J}.$$

Demonstraţie. Presupunem contrariul şi anume că $\underline{J} > \overline{J}$. Atunci, există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\underline{J} \;-\; \overline{J} \;>\; \varepsilon \;>\; 0. \tag{6.6}$$

Pe de altă parte, după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară şi superioară, putem spune că pentru $\varepsilon > 0$ de mai sus există o sumă Darboux superioară Ω_1 şi o sumă Darboux inferioară ω_2 astfel încât

$$\Omega_1 \;-\; \overline{J} \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{şi} \qquad \underline{J} \;-\; \omega_2 \;<\; \frac{\varepsilon}{2}, \;,$$

de unde deducem

$$\Omega_1 \;-\; \omega_2 \;+\; (\underline{J} \;-\; \overline{J}) \;<\; \varepsilon.$$

În consecinţă, în conformitate cu (6.6), avem

$$\Omega_1 \;-\; \omega_2 \;<\; 0$$

care contrazice una din proprietatăţile sumelor Darboux. ∎

Următoarea teoremă de existenţa a unei integrale triple se demonstrează aplicând argumente similare celor din demonstraţia teoremei de existenţă a unei integrale duble.

Teorema 6.3.2 *Orice funcţie continuă f definită pe mulţimea cubabilă compactă $V \subset I\!R^3$ este integrabilă pe V.*

Ca şi la integrala dublă, condiţia de continuitate a integrantului este destul de restrictivă. De aceea, teorema următoare stabileşte existenţa integralei triple pentru o clasă de funcţii discontinue.

Teorema 6.3.3 *Dacă funcţia reală $f(x, y, z)$, mărginită pe mulţimea cubabilă compactă V, este continuă peste tot în V cu excepţia unei mulţimi de volum egal cu zero, atunci ea este integrabilă pe V.*

6.4 Proprietăţile integralei triple

Proprietăţile integralei triple sunt analoage celor ale integralei duble şi de aceea ne vom limita doar să le enumerăm.

1. (*liniaritate*). Dacă funcţiile reale de trei variabile reale f şi g sunt integrabile pe mulţimea măsurabilă Jordan V, iar λ şi μ sunt constante reale arbitrare, atunci funcţia $\lambda\, f \;+\; \mu\, g$ ale cărei valori se calculează după legea

$$(\lambda\, f \;+\; \mu\, g)(x, y, z) = \lambda\, f(x, y, z) + \mu\, g(x, y, z),\ (\forall)\ (x, y, z) \in V,$$

este integrabilă pe V şi

$$\iiint\limits_V (\lambda f + \mu g)(x, y, z)\, dv =$$

$$= \lambda \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv + \mu \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dv.$$

2. (*aditivitate*). Dacă $V = V_1 \cup V_2$, unde V_1 şi V_2 sunt mulţimi cubabile compacte, iar $V_1 \subset I\!R^3$ şi $V_2 \subset I\!R^3$ nu au puncte interioare comune şi

funcţia $f : V \to I\!R$ este integrabilă pe V, atunci f este integrabilă pe fiecare din mulţimile V_1 şi V_2 şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

3. (*monotonie*). Dacă f este integrabilă pe V şi

$$f(x,y,z) \;\; \geq \;\; 0, \quad (\forall)\ (x,y,z) \in V,$$

integrala triplă din funcţia f satisface inegalitatea

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz \;\; \geq \;\; 0.$$

4. (*monotonie*). Dacă f şi g sunt integrabile pe mulţimea măsurabilă Jordan V şi

$$f(x,y,z) \;\; \leq \;\; g(x,y,z), \quad (\forall)\ (x,y,z) \in V,$$

între integralele celor două funcţii avem inegalitatea

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz \;\; \leq \;\; \iiint\limits_{V} g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Această proprietate a integralei triple implică următoarele două proprietăţi.

5. (*evaluarea valorii absolute a integralei triple*). Dacă f este integrabilă pe mulţimea măsurabilă Jordan V, atunci funcţia valoarea absolută a lui f este integrabilă pe V şi

$$\Big|\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz\Big| \;\; \leq \;\; \iiint\limits_{V} |\,f(x,y,z)\,|dxdydz.$$

6. (*teorema valorii medii*). Dacă funcţia reală de trei variabile reale f este integrabilă pe mulţimea măsurabilă Jordan V şi satisface inegalitatea
$$m \;\leq\; f(x,y,z) \;\leq\; M, \quad (\forall)\ (x,y,z)\in V,$$
iar $\mathrm{vol}\, V$ este volumul lui V, atunci
$$m\,\mathrm{vol}\, V \;\leq\; \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz \;\leq\; M\,\mathrm{vol}\, V.$$
Dacă funcţia f este în plus continuă pe V, teorema valorii medii devine

7. Dacă f este funcţie continuă pe mulţimea cubabilă compactă V, există un punct $(\xi,\eta,\zeta)\in V$, astfel încât
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{vol}\, V.$$

8. Este evidentă egalitatea
$$\iiint\limits_V dxdydz \;=\; \mathrm{vol}\, V.$$

6.5 Evaluarea integralei triple

6.5.1 Integrala triplă pe intervale tridimensionale închise

Teorema 6.5.1 *Dacă funcţia reală mărginită, de trei variabile reale,*
$$f:[a,b]\times[c,d]\times[u,v]\to I\!R,$$
$$-\infty<a<b<+\infty,\quad -\infty<c<d<+\infty,\quad -\infty<u<v<+\infty$$
este integrabilă pe intervalul tridimensional închis
$$I_3 \;=\; [a,b]\times[c,d]\times[u,v]$$
şi pentru orice $(x,y)\in I_2=[a,\,b]\times[c,d]$ *există numărul real* $F(x,y)$ *definit de integrala depinzând de parametrii* x *şi* y
$$F(x,y) \;=\; \int_u^v f(x,y,z)\,dz, \tag{6.7}$$

atunci funcţia

$$F \,:\, I_2 \,\to\, I\!R, \quad F(x,y) \,=\, \int_u^v f(x,y,z)\,dz, \quad (\forall)\ (x,y)\in I_2$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional I_2 şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \,=\! \iint\limits_{I_2} F(x,y)\,dxdy \,=\! \iint\limits_{I_2} \Big(\int_u^v f(x,y,z)dz\Big)dxdy. \tag{6.8}$$

Demonstraţie. Fie d', d'' şi d''' diviziuni ale respectiv intervalelor reale compacte $[a,b]$, $[c,d]$ şi $[u,v]$:

$$\begin{cases} d' &=& \{x_0, x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_m\}; \\ d'' &=& \{y_0, y_1, \cdots, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_n\}; \\ d''' &=& \{z_0, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}, \cdots, z_p\}, \end{cases} \tag{6.9}$$

unde

$$\begin{cases} a &=& x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_m &=& b, \\ c &=& y_0 < y_1 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_n &=& d, \\ u &=& z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{k+1} < \cdots < z_p &=& v. \end{cases}$$

Cu ajutorul diviziunilor d', d'', d''' putem defini o diviziune Δ a intervalului tridimensional închis I_3

$$\Delta \,=\, \{I_{000},\ I_{100},\ \cdots\ I_{ijk},\ \cdots\ I_{mnp}\}, \tag{6.10}$$

unde elemntele I_{ijk} ale acesteia sunt intervalele tridimensionale închise

$$I_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}],$$
$$i = 0,\ 1,\ \cdots\ m-1, \quad j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ p-1,$$

iar cu ajutorul diviziunilor d' şi d'' definim o diviziune Δ' a lui I_2, unde elementele lui Δ' sunt intervalele bidimensionale închise

$$\begin{matrix} I'_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ (i = 0,\ 1,\ \cdots\ m-1,\ j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1). \end{matrix} \tag{6.11}$$

Notăm
$$m_{ijk} = \inf\{f(x,y,z): (x,y,z) \in I_{ijk}\},$$
$$M_{ijk} = \sup\{f(x,y,z): (x,y,z) \in I_{ijk}\}.$$
Aceste cantităţi sunt numere reale deoarece funcţia f este mărginită pe fiecare din intervalele tridimensioanle închise I_{ijk}.

Deoarece urmărim să demonstrăm că funcţia F definită de (6.7) este integrabilă pe intervalul bidimensional închis I_2 va trebui să considerăm sumele integrale ale funcţiei F corespunzătoare tuturor diviziunilor Δ' ale intervalului bidimensional I_2, ale căror elemente au forma (6.11), pentru alegeri arbitrare ale punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_j) \in I'_{ij}$. Aceste sume au forma
$$\sigma_{D'}(F,(\xi_i,\eta_j)) = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} F(\xi_i,\eta_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j). \qquad (6.12)$$

Dacă ţinem seama de modul cum a fost definită funcţia F şi de proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei Riemann, avem
$$F(\xi_i,\eta_j) = \int_u^v f(\xi_i,\eta_j,z)dz = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i,\eta_j,z)dz.$$

Aplicând formula de medie integralelor simple
$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i,\eta_j,z)dz$$
deducem că există numerele reale μ_{ijk} cu $m_{ijk} \le \mu_{ijk} < M_{ijk}$, astfel încât
$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i,\eta_j,z)dz = \mu_{ijk}(z_{k+1}-z_k).$$

Deci, pentru sumele integrale (6.12) asociate funcţiei F definită pe intervalul bidimensional I_2, corespunzătoare modului de divizare Δ' şi alegerii punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_j) \in I_{ij}$, avem
$$\sigma_{\Delta'}(F,(\xi_i,\eta_j)) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} \mu_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k).$$

Dacă ţinem seama de inegalităţile
$$m_{ijk} \le \mu_{ijk} \le M_{ijk},$$
$$(i = 0,\, 1,\, \cdots\, m-1,\ j = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1,\ k = 0,\, 1,\, \cdots,\, p-1)$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}\, v_{ijk} \;\leq\; \sigma_{\Delta'}(F,(\xi_i,\eta_j)) \;\leq\; \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}\, v_{ijk}, \tag{6.13}$$

unde v_{ijk} este volumul intervalului tridimensional I_{ijk}

$$v_{ijk} = \operatorname{vol} I_{ijk} = (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k).$$

Prima sumă din inegalităţile (6.13) este suma Darboux inferioară a funcţiei f relativă la diviziunea Δ a lui I_3

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}\, v_{ijk}.$$

Ultima sumă din inegalităţile (6.13) este suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la aceeaşi diviziune Δ a intervalului tridimensional I_3

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}\, v_{ijk}.$$

Avem deci inegalăţile

$$s_\Delta(f) \;\leq\; \sigma_{\Delta'}(F,(\xi_i,\eta_j)) \;\leq\; S_\Delta(f)$$

pentru orice diviziune Δ de forma (6.10) a intervalului tridimensional I_3 şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_i,\eta_j) \in I_2$.

Fie acum $(d'_r)_{r\in I\!N^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că şirul normelor acestor diviziuni $(\|d'_r\|)_{r\in I\!N^*}$ este convergent la zero, $(d''_r)_{r\in I\!N^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale intervalului $[c,d]$ cu proprietatea $\|d''_r\| \to 0$ şi $(d'''_r)_{r\in I\!N^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale lui $[u,v]$ cu $\|d'''_k\| \to 0$. Notăm cu Δ_r diviziunea intervalului tridimensional închis $I_3 = [a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ definită de diviziunile d'_r, d''_r, d'''_r ale respectiv intervalelor închise $[a,b]$, $[c,d]$, $[u,v]$ şi cu Δ'_r diviziunea intervalului bidimensional închis $I_2 = [a,b]\times[c,d]$ definită de diviziunile d'_r şi d''_r. Se vede că

$$\|d'_r\| \to 0,\ \|d''_r\| \to 0 \implies \|\Delta_r\| \to 0 \ \text{ şi } \ \|\Delta'_r\| \to 0.$$

Pentru fiecare r avem inegalităţile

$$s_{\Delta_r}(f) \;\leq\; \sigma_{\Delta'_r}(F,(\xi_i,\eta_j)) \;\leq\; S_{\Delta_r}(f). \tag{6.14}$$

Funcţia f fiind integrabilă pe I_3, aplicând criteriul de integrabilitate a lui Darboux, avem

$$\lim_{r\to\infty} S_{\Delta_r}(f) = \lim_{r\to\infty} s_{\Delta_r}(f) = \iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (6.15)$$

Trecând la limită în (6.14) şi ţinând cont de (6.15), obţinem

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{\Delta'_r}(F,(\xi_i,\eta_j)) = \iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (6.16)$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei duble a unei funcţii reale de două variabile reale se vede imediat că

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{\Delta'_r}(F,(\xi_i,\eta_j)) = \iint\limits_{I_2} F(x,y)\,dxdy. \qquad (6.17)$$

Din egalităţile (6.16) şi (6.17) obţinem (6.8) şi teorema este demonstrată. ∎

De obicei se foloseşte notaţia

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{I_2} dxdy \int_u^v f(x,y,z)dz. \qquad (6.18)$$

În cazul integralelor duble am utilizat notaţia

$$\iint\limits_{I_2} F(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy. \qquad (6.19)$$

Ţinând cont de faptul că avem egalitatea

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_c^d dy \int_u^v f(x,y,z)\,dz, \qquad (6.20)$$

folosind (6.19) şi (6.20) constatăm că (6.8) se scrie în forma

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_u^v f(x,y,z)\,dz. \qquad (6.21)$$

Putem spune că (6.8), (6.18) şi (6.21) reprezintă *formule de calcul a integralei triple pe un interval tridimensional închis.*

Observaţia 6.5.1 *Integrala triplă pe un interval tridimensional închis este o iteraţie de integrale simple, deci un calcul succesiv a trei integrale Riemann ale unor funcţii reale. Prima integrală din membrul doi a relaţiei* (6.21), *efectuată în raport cu variabila* z *pe intervalul* $[u, v]$, *este o integrală depinzând de doi parametri, a doua integrală simplă, calculată în raport cu* y *pe compactul* $[c, d]$, *este o integrală depinzând de parametrul* x. *Ultima integrală, efectuată între limitele* a *şi* b, *este tocmai integrala triplă a funcţiei* f *pe intervalul tridimensional* I_3.

Observaţia 6.5.2 *Dacă presupunem că funcţia* $f : I_3 \to I\!R$ *este integrabilă şi integralele:*

$$G(y,z) \;=\; \int_a^b f(x,y,z)\,dx; \qquad H(z,x) \;=\; \int_c^d f(x,y,z)\,dy$$

există pentru orice $(y,z) \in [c,d] \times [u,v]$ *şi respectiv pentru orice* $(z,x) \in [u,v] \times [a,b]$, *atunci procedând ca în teorema de mai sus putem deduce următoarele două formule de calcul ale integralei triple pe intervalul tridimensional închis* $I_3 = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$:

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \int_c^d dy \int_u^v dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx;$$

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \int_u^v dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\,dy.$$

Observaţia 6.5.3 *Dacă* $f(x,y,z) = g(x)\cdot h(y)\cdot k(z)$ *şi funcţiile reale de o variabilă reală* $g : [a,\, b] \to I\!R,\; h : [c,\, d] \to I\!R,\; k : [u,\, v] \to I\!R$ *sunt integrabile Riemann, atunci* f *este integrabilă pe intervalul tridimensional închis* $I_3 = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$ *şi are loc egalitatea*

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdy \;=\; \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy \cdot \int_u^v k(z)dz,$$

relaţie care arată că în acest caz particular integrala triplă este un produs de trei integrale simple.

6.5.2 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz

Pentru a da regula de calcul a unei integrale triple în cazul în care domeniul de integrare V nu mai este un interval tridimensional închis este necesară noţiunea de domeniu simplu în raport cu una din axele reperului cartezian rectangular $Oxyz$.

Definiţia 6.5.1 *Se numeşte* **domeniu simplu în raport cu axa** Oz *submulţimea* V_z *a lui* $I\!R^3$

$$V_z = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D_{xy} \subset Oxy, \ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\},$$

unde φ_1, φ_2 *sunt funcţii reale continue pe submulţimea* D_{xy} *a lui* $I\!R^2$.

Analizând definiţia domeniului simplu în raport cu axa Oz, constatăm că frontiera acestuia este alcătuită din suprafeţele:

$$(S_1) : \ z = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}; \ (S_2) : \ z = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy},$$

pe care le putem numi *baza inferioară* şi respectiv *baza superioară* a domeniului de integrare V_z, şi din porţiunea de *suprafaţă cilindrică*

$$(S_\ell) \quad = \quad \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in \partial D_{xy}, \ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\},$$

unde ∂D_{xy} este frontiera mulţimi D_{xy}, curbă închisă netedă pe porţiuni.

Mulţimea plană D_{xy} din definiţia domeniului simplu în raport cu axa Oz este proiecţia ortogonală a mulţimii V_z pe planul Oxy. Suprafaţa cilindrică S_ℓ are generatoarele paralele cu Oz şi curba directoare frontiera domeniului D_{xy}.

Un domeniu simplu în raport cu axa Oz are proprietatea că orice paralelă la axa Oz printr–un punct (x, y) din interiorul domeniului D_{xy}, orientată la fel cu axa Oz, *pătrunde* în domeniul V_z prin punctul $P(x, y, \varphi_1(x, y))$ pe care putem să–l numim *punct de intrare în domeniu* şi *iese* din V_z prin punctul $Q(x, y, \varphi_2(x, y))$ care poate fi denumit *punct de ieşire din domeniul* V_z.

Procedând exact ca în cazul teoremei de la integrala dublă avem:

Teorema 6.5.2 *Fie* V_z *un domeniu simplu în raport cu axa* Oz *şi* f *o funcţie reală mărginită definită şi integrabilă pe mulţimea* V_z*. Dacă pentru orice* $(x, y) \in D_{xy}$*, fixat, există integrala depinzând de parametrii* x *şi* y

$$J(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

atunci funcţia $J : D_{xy} \to I\!R$ *este integrabilă şi*

$$\iint\limits_{D_{xy}} J(x,y)\,dxdy = \iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Demonstraţie. Înainte de a începe demonstraţia, să observăm că având în vedere expresia valorii în $(x,y) \in D_{xy}$ a funcţiei J, integrala dublă pe D_{xy} a acesteia se poate scrie în una din următoarele forme

$$\iint\limits_{D_{xy}} J(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \Big(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,y)dz.$$

Atunci, concluzia teoremei devine

$$\iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{6.22}$$

şi reprezintă *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz.

Să procedăm acum la demonstraţia teoremei.

Fie $u = \min\{\varphi_1(x,y);\ (x,y) \in D_{xy}\}$ şi $v = \max\{\varphi_2(x,y);\ (x,y) \in D_{xy}\}$ care sunt numere reale în baza faptului că funcţiile φ_1 şi φ_2 sunt continue pe mulţimea compactă D_{xy} şi, după teorema lui Weierstrass, sunt funcţii mărginite şi îşi ating efectiv marginile. Atunci, cilindrul $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 :\ (x,y) \in D_{xy},\ u \le z \le v\}$ include domeniul simplu în raport cu axa Oz la care se referă enunţul teoremei.

Considerăm funcţia reală auxiliară f^*, definită pe cilindrul $\mathcal{C}$,

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in V_z \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in \mathcal{C} \setminus V_z. \end{cases} \tag{6.23}$$

Această funcţie satisface ipotezele Teoremei 6.3.3. Într-adevăr, deoarece valorile sale coincid cu cele ale funcţiei f pe mulţimea V_z putem afirma că f^* este integrabilă pe V_z. Restricţia lui f^* la mulţimea $\mathcal{C} \setminus V_z$ fiind funcţia identic nulă rezultă că este integrabilă. Dacă la aceste două rezultate adăugăm

şi proprietatea de aditivitate a integralei triple deducem că funcţia f^* din (6.23) este integrabilă. Mai mult, avem evident:

$$\iiint\limits_{V_z} f^*(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz; \tag{6.24}$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}\setminus V_z} f^*(x,y,z)\,dxdydz \;=\; 0, \tag{6.25}$$

deci

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f^*(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

În afară de aceasta, pentru fiecare pereche (x,y) situată în D_{xy} are loc egalitatea

$$\begin{gathered}\int_u^v f^*(x,y,z)dz = \\ \int_u^{\varphi_1(x,y)} f^*(x,y,z)dz + \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f^*(x,y,z)dz + \int_{\varphi_2(x,y)}^{v} f^*(x,y,z)\,dz\end{gathered} \tag{6.26}$$

din motiv că fiecare din integralele din membrul doi există. Apoi, dat fiind faptul că pe segmentele de dreaptă incluse în $\mathcal{C}$ care unesc respectiv perechile de puncte

$$(x,y,u),\quad (x,y,\varphi_1(x,y)) \quad \text{şi} \quad (x,y,\varphi_2(x,y)),\quad (x,y,v),$$

valorile funcţiei f^* sunt egale cu zero, deducem că prima şi a treia integrală din membrul doi al relaţiei (6.26) sunt nule, fapt care conduce la egaliatatea

$$\int_u^v f^*(x,y,z)\,dz \;=\; \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Integrala triplă din funcţia f^* pe mulţimea $\mathcal{C}$ poate fi redusă la iteraţia de integrale

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f^*(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_u^v f^*(x,y,z)\,dz. \tag{6.27}$$

Relaţiile stabilite mai sus conduc la concluzia teoremei. ∎

Exerciţiul 6.5.1 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

unde Ω *este tetraedrul delimitat de planele de coordonate* $x=0$, $y=0$, $z=0$ *şi de planul* $x+y+z-1=0$.

Soluţie. Proiecţia domeniului de integrare pe planul Oxy este triunghiul dreptunghic isoscel cu unghiul drept în origine şi unghiurile de 45^0 în punctele $A(1,0,0)$ şi $B(0,1,0)$.

Domeniul Ω este simplu în raport cu axa Oz deoarece orice paralelă la axa Oz dusă printr–un punct din interiorul triunghiului mai sus menţionat *pătrunde* în domeniul Ω în punctul $P(x,y,0)$ şi *iese* din domeniu în punctul $Q(x,y,1-x-y)$. Prin urmare avem că $\varphi_1(x,y)=0$ şi $\varphi_2(x,y)=1-x-y$.

Proiecţia domeniului Ω pe planul Oxy este

$$D_{xy} = \{(x,y)\in I\!R^2 :\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}. \tag{6.28}$$

Dacă aplicăm formula (6.22), avem

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \Big[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\Big]dxdy. \tag{6.29}$$

Analizând (6.28) constatăm că domeniul D_{xy} este simplu în raport cu axa Oy. Prin urmare, pentru calculul integralei duble (6.29) se poate aplica formula (4.37). Avem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\Big[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\Big]dy = -\frac{1}{2}\int_0^1\Big(\frac{1}{1+x+y}+\frac{y}{4}\Big)\Big|_0^{1-x}dx.$$

După efectuarea diferenţei valorilor primitivei în cele două limite de integrare, găsim

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1\Big(\frac{1}{1+x}+\frac{x-3}{4}\Big)dx.$$

Integralele definite la care s–a ajuns sunt imediate şi prin urmare

$$I = \Big(\ln\sqrt{1+x}+\frac{(x-3)^2}{16}\Big)\Big|_0^1 = \ln\sqrt{2}-\frac{5}{16}.$$

■

6.5.3 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox

Definiţia 6.5.2 *Se numeşte* **domeniu simplu în raport cu axa** Ox *submulţimea* V_x *a lui* $I\!R^3$

$$V_x = \{(x,y,z) \in I\!R^3 :\ (y,z) \in D_{yz} \subset Oyz,\ \psi_1(y,z) \leq x \leq \psi_2(y,z)\},$$

unde funcţiile reale ψ_1 *şi* ψ_2 *sunt definite şi continue pe submulţimea* D_{yz} *a lui* $I\!R^2$*, situată în planul* Oyz*, valorile acestora fiind astfel încât* $\psi_1(y,z) \leq \psi_2(y,z)$ *oricare ar fi* $(y,z) \in D_{yz}$.

Frontiera unui domeniu simplu în raport cu axa Ox este alcătuită din suprafeţele:

$$(\Sigma_1):\ x = \psi_1(y,z),\ (y,z) \in D_{yz};\quad (\Sigma_2):\ x = \psi_2(y,z),\ (y,z) \in D_{yz},$$

numite *baze* şi *suprafaţă cilindrică*

$$(\Sigma_\ell) = \{(x,y,z) \in I\!R^3 :\ (y,z) \in \partial D_{yz},\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\},$$

unde ∂D_{yz} este frontiera mulţimi D_{yz}, curbă închisă netedă pe porţiuni.

Mulţimea plană D_{yz} este proiecţia ortogonală a mulţimii V_x pe planul Oyz. Suprafaţa cilindrică Σ_ℓ are generatoarele paralele cu Ox şi curba directoare frontiera domeniului D_{yz}.

Un domeniu simplu în raport cu axa Ox are proprietatea că orice paralelă la axa Ox printr–un punct (y,z) din interiorul domeniului D_{yz}, având orientarea axei Ox, *pătrunde* în domeniul V_x prin punctul $P(\psi_1(y,z),y,z)$ şi *iese* din V_x prin punctul $Q(\psi_2(y,z),y,z)$.

Teorema 6.5.3 *Dacă funcţia reală* f *este integrabilă pe domeniul* V_x*, simplu în raport cu axa absciselor şi pentru orice* $(y,z) \in D_{yz}$*, fixat, există integrala depinzând de parametrii* y *şi* z

$$U(y,z) = \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx,$$

atunci funcţia

$$U : D_{yz} \to I\!R,\quad U(y,z) = \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

este integrabilă şi

$$\iint\limits_{D_{yz}} U(y,z)\,dydz = \iiint\limits_{V_x} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.30}$$

Integrala dublă pe domeniul D_{yz} din funcţia U se mai poate scrie ca

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{yz}} U(y,z)\,dydz &= \iint\limits_{D_{yz}} \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx\Big)dydz = \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,y)dx.\end{aligned}$$

Ţinând cont de ultimele egalităţi deducem că (6.30) poate fi scrisă în forma

$$\iiint\limits_{V_x} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \tag{6.31}$$

care reprezintă *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox.

6.5.4 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy

Definiţia 6.5.3 *Submulţimea V_y a lui $I\!R^3$*

$$V_y = \{(x,x,z) \in I\!R^3 :\ (x,z) \in D_{xz} \subset Oxz, \chi_1(x,z) \le y \le \chi_2(x,z)\},$$

unde funcţiile reale χ_1 şi χ_2 sunt definite şi continue pe submulţimea D_{xz} a lui $I\!R^2$, situată în planul Oxz, valorile acestora fiind astfel încât $\chi_1(x,z) \le \chi_2(x,z)$ oricare ar fi $(x,z) \in D_{xz}$, se numeşte **domeniu simplu în raport cu axa** Oy.

Suprafeţele care mărginesc un domeniu simplu în raport cu axa Oy sunt:

$$(\mathcal{S}_1):\ y = \chi_1(x,z),\ \ (x,z) \in D_{xz};\ (\mathcal{S}_2):\ y = \chi_2(x,z),\ \ (x,z) \in D_{xz},$$

numite *baze* şi *suprafaţă cilindrică* $\mathcal{S}_\ell$

$$(\mathcal{S}_\ell) \ = \ \{(x,y,z) \in I\!R^3 :\ (x,z) \in \partial D_{xz},\ \chi_1(x,y) \le z \le \chi_2(x,y)\},$$

unde ∂D_{xz} este frontiera mulţimi D_{xz}, curbă închisă netedă pe porţiuni.

Mulţimea plană D_{xz} este proiecţia ortogonală a mulţimii V_y pe planul Oxz. Suprafaţa cilindrică $(\mathcal{S}_\ell)$ are generatoarele paralele cu Oy şi curba directoare frontiera domeniului D_{xz}.

Un domeniu simplu în raport cu axa Oy are proprietatea că orice paralelă la axa Oy printr–un punct (x,z) din interiorul domeniului D_{xz}, având orientarea axei Oy, *pătrunde* în domeniul V_y prin punctul $P(x,\chi_1(x,z),z)$ şi *iese* din V_y prin punctul $Q(x,\chi_2(x,z),z)$.

Teorema 6.5.4 *Dacă funcţia reală mărginită f este integrabilă pe domeniul V_y, simplu în raport cu axa Oy, şi pentru orice $(x,z)\in D_{xz}$, fixat, există integrala depinzând de parametrii x şi z*

$$W(x,z)=\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy,$$

atunci funcţia

$$W: D_{xz}\to I\!\!R,\quad W(x,z)=\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

este integrabilă şi

$$\iint\limits_{D_{xz}} W(x,z)\,dxdz=\iiint\limits_{V_y} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.32}$$

Integrala dublă pe domeniul D_{xz} din funcţia W se poate scrie în una din următoarele forme:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xz}} W(x,z)\,dxdz &= \iint\limits_{D_{xz}} \Big(\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy\Big)dxdz;\\ \iint\limits_{D_{xz}} W(x,z)\,dxdz &= \iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,y)dy.\end{aligned}$$

Ţinând cont de aceste egalităţi deducem că *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy este

$$\iiint\limits_{V_y} f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \tag{6.33}$$

6.5.5 Integrala triplă pe un domeniu oarecare

Dacă domeniul de integrare V nu este simplu în raport cu nici una din axe, prin plane paralele la unul din planele de coordonate poate fi descompus întrun număr finit de subdomenii,

$$V_1, \quad V_2, \quad \cdots, V_p \qquad \text{cu} \qquad V \;=\; V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_p$$

şi fiecare din domeniile V_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$ să fie simplu în raport cu una din axe.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu, avem

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{i=1}^{p} \iiint\limits_{V_i} f(x,y,z)\,dxdydz,$$

unde pentru calculul integralelor din membrul drept se aplică una din formulele de calcul stabilite mai sus.

Exerciţiul 6.5.2 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{I_3} \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2},$$

unde I_3 *este intervalul tridimensional închis* $I_3 = [1,3] \times [0,1] \times [0,2]$.

Soluţie. Avem

$$I = \int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 \frac{dy}{(x+y+z)^2} = \int_1^3 dx \int_0^1 \Big(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y+2}\Big) dy.$$

Calculând cele două integrale depinzând de parametrul x, obţinem

$$I = \int_1^3 (\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln x - \ln(x+3))\,dx.$$

Integralele definite la care s–a ajuns sunt de forma integralei

$$J(a) = \int_1^3 \ln(x+a)\,dx$$

căreia i se poate afla valoarea dacă se integrează prin părţi. Avem:

$$J(a) = x\,\ln(x+a)\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x}{x+a}\,dx;$$

$$J(a)=(x+a)\,\ln(x+a)\Big|_1^3-x\Big|_1^3=(3+a)\,\ln(3+a)-(1+a)\,\ln(1+a)-2.$$

Atunci, valoarea integralei triple este

$$I=J(1)+J(2)-J(0)-J(3)=5\,\ln 5+8\,\ln 2-12\,\ln 3.$$

Funcţia de integrat fiind pozitivă, valoarea lui I este un număr pozitiv căruia i se poate da o interpretare mecanică. ■

Exerciţiul 6.5.3 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I=\iiint\limits_V y\,dxdydz,$$

unde V este tetraedrul din primul octant limitat de planele de coordonate şi de planul $x+y+z-2=0$.

Soluţie. Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz căci putem scrie

$$V=\{(x,y,z)\in I\!R^3:\ (x,y)\in D_{xy},\ 0\le z\le 2-x-y\},$$

unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy

$$D_{xy}=\{(x,y)\in I\!R^2:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x\}.$$

Mulţimea D_{xy} este domeniu plan simplu în raport cu axa Oy. Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor şi apoi formula de calcul a unei integrale duble când domeniul este simplu în raport cu axa ordonatelor, obţinem

$$I=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}y\,dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}y(2-x-y)\,dy.$$

După calcularea integralei din interior, avem

$$I=\int_0^2\Big(y^2-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^{2-x}dx.$$

Luând expresia de sub semnul integrală între limitele indicate, găsim

$$I=\frac{1}{6}\int_0^2(2-x)^3dx=-\frac{1}{24}(x-2)^4\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

De observat că domeniul de integrare este simplu şi în raport cu axa Ox sau axa Oy astfel că pentru calculul integralei triple s–ar fi putut utiliza fie formula (6.31) fie formula (6.33). ■

Exerciţiul 6.5.4 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)z\,dxdydz,$$

unde domeniul V *este mărginit de paraboloidul* $z = x^2 + y^2$ *şi de sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ *şi conţine o parte din porţiunea nenegativă a axei* Oz.

Soluţie. La fel ca în exemplul precedent şi aici domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz căci el se poate scrie în forma

$$V = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D_{xy},\ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}\},$$

unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy

$$D_{xy} = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \le 2\}.$$

Mulţimea D_{xy} este discul închis cu centrul în origine şi raza $\sqrt{2}$, această afirmaţie deducându–se din faptul că intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ cu paraboloidul $z = x^2 + y^2$ este cercul de rază $\sqrt{2}$ cu centrul în punctul $(0, 0, 2)$ aflat în planul paralel cu planul Oxy de ecuaţie $z = 2$.

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor, obţinem

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dxdy.$$

Luând expresia de integrat între limitele de integrare precizate, găsim

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\Big(6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2\Big)dxdy.$$

Dacă trecem la coordonate polare, avem

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\quad \theta \in [0, 2\pi),\ \rho \in [0, \sqrt{2}]$$

şi deci

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3(6 - \rho^2 - \rho^4), d\rho = \frac{8\pi}{3}.$$

6.6 Formula integrală Gauss–Ostrogradski

Vom deduce o legătură între integrala de suprafaţă de tipul al doilea şi integrala triplă. În acest sens, fie $V \subset I\!\!R^3$ un domeniu cubabil compact, având frontiera o suprafaţă $\mathcal{S}$ simplă, închisă, bilateră, netedă sau netedă pe porţiuni, cu $\mathcal{S}_e$ faţa sa exterioară. Versorul $\mathbf{n}$ al normalei exterioare întrun punct al suprafeţei $\mathcal{S}_e$ are expresia

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}, \tag{6.34}$$

unde α, β şi γ sunt unghiurile pe care acest versor îl face cu versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ai reperului $Oxyz$.

Considerăm că P, Q, R sunt funcţii reale de trei variabile reale definite şi continue pe domeniul V. Presupunem că aceste funcţii sunt astfel încât divergenţa câmpului vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k} \tag{6.35}$$

există şi este funcţie continuă pe interiorul mulţimi V.

Teorema 6.6.1 *În ipotezele de mai sus, are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{V} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz, \tag{6.36}$$

numită formula integrală Gauss–Ostrogradski.

Demonstraţie. Presupunem că domeniul V este descompus întrun număr finit de subdomenii simple în raport cu axa Oz. Dacă aplicăm proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul de integrare pentru integrala de suprafaţă şi pentru integrala triplă putem presupune că V este simplu în raport cu axa Oz şi că proiecţia sa pe planul Oxy este domeniul plan compact D_{xy} având frontiera ∂D_{xy} o curbă simplă închisă netedă sau netedă pe porţiuni. Atunci, frontiera $\mathcal{S}$ a domeniului V este o reuniune de trei suprafeţe netede sau netede pe porţiuni $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_\ell$, unde:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{S}_1):\ \ z = z_1(x,y), \quad (x,y)\in D_{xy};\\ &(\mathcal{S}_2):\ \ z = z_2(x,y), \quad (x,y)\in D_{xy}; \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(x,y,z)\in I\!\!R^3:\ (x,y)\in\partial D_{xy},\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}. \tag{6.38}$$

Suprafaţa $\mathcal{S}_1$, baza inferioară a domeniului V, are normala

$$\mathbf{n}_1 = \cos\alpha_1\,\mathbf{i} + \cos\beta_1\,\mathbf{j} + \cos\gamma_1\,\mathbf{k}. \tag{6.39}$$

Deoarece unghiul γ_1 dintre această normală şi versorul $\mathbf{k}$ este obtuz, urmează că

$$\cos\gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}},$$

unde $p_1(x,y) = \dfrac{\partial z_1}{\partial x}(x,y),\quad q_1(x,y) = \dfrac{\partial z_1}{\partial y}(x,y).$

Suprafaţa $\mathcal{S}_2$, baza superioară a domeniului V, are normala

$$\mathbf{n}_2 = \cos\alpha_2\,\mathbf{i} + \cos\beta_2\,\mathbf{j} + \cos\gamma_2\,\mathbf{k} \tag{6.40}$$

şi pentru că unghiul γ_2 dintre $\mathbf{n}_2$ şi $\mathbf{k}$ este ascuţit, avem

$$\cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}},$$

unde $p_2(x,y) = \dfrac{\partial z_2}{\partial x}(x,y)$, $q_2(x,y) = \dfrac{\partial z_2}{\partial y}(x,y)$.

În sfârşit, $\mathcal{S}_\ell$ este suprafaţa laterală a domeniului V care, fiind o porţiune dintr–o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curba directoare frontiera ∂D_{xy} a domeniului D_{xy}, are normala $\mathbf{n}_\ell$ de forma

$$\mathbf{n}_\ell = \cos\alpha_\ell\,\mathbf{i} + \cos\beta_\ell\,\mathbf{j} \tag{6.41}$$

întrucât unghiul γ_ℓ dintre $\mathbf{n}_\ell$ şi $\mathbf{k}$ este egal cu $\pi/2$.

După aceste precizări în privinţa domeniului V să procedăm la calculul integralei triple

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.42}$$

Aplicând formula de calcul a integralei triple pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz, găsim

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dxdy. \tag{6.43}$$

Luând valoarea primitivei în limitele indicate, obţinem

$$I = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy. \tag{6.44}$$

Dar:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy &= \iint_{\mathcal{S}_2} R(x,y,z)\,dxdy; \\ -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy &= \iint_{\mathcal{S}_1} R(x,y,z)\,dxdy, \end{aligned} \tag{6.45}$$

unde pentru prima integrală de suprafaţă am luat faţa superioară care coimcide cu faţa exterioară a lui $\mathcal{S}$, iar pentru cea de a doua integrală de suprafaţă am considerat faţa inferioară care de asemeni coincide cu faţa exterioară a lui $\mathcal{S}$, normalele la aceste feţe fiind precizate în relaţiile (6.39) şi (6.40). Pe suprafaţa laterală $\mathcal{S}_\ell$ avem

$$\iint_{\mathcal{S}_\ell} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{\mathcal{S}_\ell} R(x,y,z)\,\cos\gamma_\ell\,d\sigma = 0 \tag{6.46}$$

în baza legăturii dintre integrala de suprafaţă de al doilea tip şi cea de primul tip şi a relaţiei (6.41).

Dacă ţinem seama de relaţiile (6.44) – (6.46), deducem

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\mathcal{S}_e} R(x,y,z)\,dxdy, \tag{6.47}$$

unde integrala de suprafaţă de tipul al doilea din membrul doi este luată pe faţa exterioară a lui $\mathcal{S}$. În baza observaţiei făcută privitor la domeniu putem afirma că (6.47) este adevărată pentru orice domeniu cubabil compact V.

Pornind cu un domeniu simplu în raport cu axa Ox, apoi cu unul simplu în raport cu axa Oy, şi repetând raţionamentele care ne–au condus la (6.47) se demonstrează egalităţile:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\mathcal{S}_e} P(x,y,z)\,dydz \tag{6.48}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\mathcal{S}_e} Q(x,y,z)\,dzdx \tag{6.49}$$

care şi în aceste cazuri rămân adevărate oricare ar fi domeniul cubabil compact V.

Însumarea egalităţilor (6.47) – (6.49) conduce la (6.36) şi teorema este complet demonstrată. ■

Observaţia 6.6.1 *Având în vedere legătura între cele două tipuri de integrale de suprafaţă rezultă că formula integrală Gauss–Ostrogradski se poate scrie în forma echivalentă*

$$\iint_{\mathcal{S}_e} \Big(P\,\cos\alpha + Q\,\cos\beta + R\,\cos\gamma\Big)\,d\sigma = \iiint_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,dxdydz \quad (6.50)$$

Folosind expresia divergenţei $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$ a câmpului vectorial (6.35)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

şi expresia normalei exterioare (6.34), deducem că formula integrală Gauss–Ostrogradski se poate scrie în forma vectorială

$$\iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \iint_{\mathcal{S}_e} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \quad (6.51)$$

Datorită scrierii vectoriale a formulei integrale Gauss–Ostrogradski, Teoremei 6.6.1 i se mai spune *Teorema divergenţei.*

Forma vectorială a formulei integrale Gauss–Ostrogradski sugerează şi interpretarea fizică a acesteia: ea afirmă că fluxul câmpului vectorial V prin suprafaţa închisă $\mathcal{S}$, după normala sa exterioară $\mathbf{n}$, este egal cu integrala triplă a divergenţei lui $\mathbf{F}$ pe domeniul V limitat de $\mathcal{S}$.

Observaţia 6.6.2 *Dacă în formula integrală Gauss–Ostrogradski se ia* $P = 0$, $Q = 0$, $R = z$, *se obţine o evaluare a volumului domeniului* V *cu ajutorul unei integrale de suprafaţă de tipul al doilea*

$$vol V \;=\; \iint_{\mathcal{S}_e} z\,dxdy. \quad (6.52)$$

Exemplul 6.6.1 *Fie* V *regiunea mărginită de emisfera*

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 9 = 0, \qquad 1 \le z \le 3$$

şi planul $z = 1$. *Să se verifice teorema divergenţei dacă*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z-1)\,\mathbf{k}.$$

Soluţie. Calculăm mai întâi integrala triplă din divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{F}$. Avem $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z)=3$ şi deci

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 54\pi.$$

În ultimul calcul am folosit faptul că integrala triplă din membrul secund este volumul emisferei de rază $R=3$ care este egal cu $2\pi R^3/3$.

Să calculăm acum direct integrala de suprafaţă care intră în formula integrală a lui Gauss-Ostrogradski. Să observăm mai întâi că

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma,$$

unde $\mathcal{S}_1$ este faţa superioară a emisferei de rază 3 situată deasupra planului $z=1$, iar $\mathcal{S}_2$ este faţa inferioară a porţiunii din planul $z=1$ limitată de cercul de rază 3 cu centrul în punctul $(0,0,1)$ aflat în acest plan.

Normala unitară la faţa $\mathcal{S}_1$ este

$$\mathbf{n}_1 = \frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+(z-1)\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}} = \frac{x}{3}\,\mathbf{i}+\frac{y}{3}\,\mathbf{j}+\frac{z-1}{3}\,\mathbf{k}.$$

Produsul scalar dintre câmpul vectorial $\mathbf{F}$ şi normala $\mathbf{n}_1$ este

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 = \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{(z-1)^2}{3}=3$$

şi, prin urmare, prima integrală de suprafaţă devine

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_1} = \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} 3\,d\sigma = 3\iint\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = 3\,\text{aria}\,\mathcal{S}_1 = 3\cdot 2\pi\,R^2 = 54\pi.$$

Pe suprafaţa $\mathcal{S}_2$, avem $\mathbf{n}_2=-\mathbf{k}$, iar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2=-z+1$ şi deci

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}_2} (-z+1)\,d\sigma = 0$$

deoarece pe suprafaţa pe care efectuăm integrarea z este egal cu 1 şi deci integrantul este nul şi ca atare şi rezultatul integrării este nul. Prin urmare,

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 54\,\pi,$$

ceea ce arată că formula integrală Gauss–Ostrogradski se verifică. ∎

Exercițiul 6.6.1 *Să se calculeze integrala de suprafață de tipul al doilea*

$$I = \iint\limits_S x^3y^2\,dydz + x^2y^3\,dzdx + 3z\,dxdy,$$

unde S este fața exterioară a domeniului V mărginit de paraboloizii:

$$(\Sigma_1):\quad z = x^2 + y^2; \qquad (\Sigma_2):\quad z = 6 - x^2 - y^2.$$

Soluție. Aplicând formula integrală Gauss–Ostrogradski, obținem

$$I = \iiint\limits_V (3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3)\,dxdydz = 3\iiint\limits_V (2x^2y^2 + 1)\,dxdydz.$$

Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz căci se poate scrie ca

$$V = \{(x,y,z) \in I\!R^3:\ (x,y) \in D_{xy},\ x^2 + y^2 \le z \le 6 - x^2 - y^2\},$$

unde D_{xy} este proiecția lui V pe planul Oxy

$$D_{xy} = \{(x,y) \in I\!R^2:\ x^2 + y^2 \le 3\}.$$

Se vede că D_{xy} este discul închis de rază $\sqrt{3}$ cu centrul în origine situat în planul Oxy. Făcând uz de formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz, găsim

$$I = 3\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (2x^2y^2+1)\,dz = 3\iint\limits_{D_{xy}} (2x^2y^2+1)z\Big|_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} dxdy.$$

După ce se ia z între limitele de integrare, deducem

$$I = 6\iint\limits_{D_{xy}} (2x^2y^2+1)(3 - x^2 - y^2)\,dxdy.$$

Această integrală dublă la care s–a ajuns o vom calcula folosind coordonatele polare

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta.$$

Pentru ca $(x,y) \in D_{xy}$ trebuia ca $\rho \in [0, \sqrt{3}]$ și $\theta \in [0, 2\pi)$. Aplicând formula schimbării de variabile în integrala dublă, obținem pe rând

$$I = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\rho^2\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta + 1)(3 - \rho^2)\rho\,d\rho,$$

$$I = 12\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(3\rho^5-\rho^7)d\rho + 12\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3\rho-\rho^3)d\rho,$$

$$I = \frac{297\pi}{8}.$$

Rezultatul obţinut reprezintă fluxul câmpului vectorial

$$\mathbf{F} = x^3y^2\,\mathbf{i} + x^2y^3\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$$

prin suprafaţa care delimitează V după normala exterioară. ■

6.7 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Teorema de schimbare de variabile în integrala triplă se enunţă asemănător cu teorema de schimbare de variabile în integrala dublă, de aceea nu vom da detalii de calcul care pot fi refăcute de cititor.

Considerăm două specimene de spaţii tridimensionale. Introducem sistemul de coordonate carteziene x, y, z în unul din ele şi u, v, w în celălalt. Apoi, fie V şi Ω domenii aparţinând la câte un spaţiu, frontierele lor fiind respectiv suprafeţele închise netede pe porţiuni $\mathcal{S}$ şi Σ. Presupunem că există o corespondenţă biunivocă între punctele celor două domenii care să fie continuă în ambele sensuri. Corespondenţa poate fi exprimată prin intermediul funcţiilor

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w), \\ y = \psi(u,v,w), \\ z = \chi(u,v,w), \end{cases} \qquad (u,v,w)\in\Omega, \tag{6.53}$$

sau prin intermediul funcţiilor

$$\begin{cases} u = u(x,y,z), \\ v = v(x,y,z), \\ w = w(x,y,z), \end{cases} \qquad (x,y,z)\in V. \tag{6.54}$$

Vom considera că funcţiile din (6.53) şi (6.54) sunt mai mult decât continue şi anume vom presupune că ele posedă derivate parţiale de ordinul întâi continue pe interioarele mulţimilor de definiţie. Atunci, Jacobienii:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}; \qquad \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$$

există şi sunt funcţii continue pe interioarele celor două mulţimi de definiţie. Vom presupune mai mult că fiecare jacobian este diferit de zero. Aceste condiţii implică relaţia

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \cdot \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} \;=\; 1. \tag{6.55}$$

Dacă toate condiţiile de mai sus sunt îndeplinite, spunem că (6.53) este o *transformare punctuală regulată* între domeniile Ω şi V, iar (6.54) este *transformarea punctuală regulată inversă* a transformării punctuale regulate (6.54). Ca şi în cazul bidimensional, se poate arăta că dată fiind transformarea punctuală regulată (6.53) sau (6.54), punctele interioare domeniului de definiţie sunt duse în puncte interioare celuilalt domeniu, iar punctele frontierei unuia din domenii sunt corespunzătoare punctelor de pe frontiera celuilat domeniu.

Transformarea punctuală regulată (6.53) transformă domeniul Ω în domeniul V. În consecinţă, specificarea unui punct (u,v,w) aparţinând lui Ω determină în mod unic punctul corespunzător (x,y,z) a lui V. Cu alte cuvinte, cantităţile u, v şi w pot fi privite drept coordonate, diferite de cele carteziene, ale punctelor domeniului V. Ele sunt numite *coordonate curbilinii.*

Considerăm, în domeniul Ω, un plan determinat de relaţia $u = u_0$, adica un plan paralel cu planul de coordonate v, w. Prin transformarea punctuală regulată (6.53), planul considerat este dus întro suprafaţă inclusă în domeniul V. Coordonatele carteziene ale punctelor acestei suprafeţe sunt exprimate prin formulele

$$\begin{cases} x \;=\; x(u_0,v,w), \\ y \;=\; y(u_0,v,w), \\ z \;=\; z(u_0,v,w), \end{cases} \qquad (v,w)\in\Delta, \tag{6.56}$$

unde Δ este porţiunea din planul $u = u_0$ situată în domeniul Ω. Expresiile (6.56) sunt ecuaţiile parametrice ale suprafeţei. Presupunând că u_0 ia toate

valorile posibile vom avea o familie uniparametrică de suprafeţe de forma (6.56), parametrul familiei fiind u. Aceste suprafeţe sunt corespondentele prin transformarea punctuală regulată (6.53) a tuturor porţiunilor de plane paralele cu planul v, w din domeniul Ω.

Similar, planele $v = \text{const}$ şi $w = \text{const}$ sunt transformate în două familii uniparametrice de suprafeţe situate în domeniul V. Aceste trei familii de suprafeţe formează aşa zisa mulţime a *suprafeţelor coordonate.*

Deoarece (6.53) este transformare punctuală regulată putem afirma că prin fiecare punct al domeniului V trece câte o singură suprafaţă de coordonate din respectiv fiecare familie. Cele trei suprafeţe coordonate care trec printr–un punct se intersectează două câte două după trei curbe care se numesc *curbe coordonate.*

Vom considera două sisteme de coordonate curbilinii în spaţiu care sunt utilizate cel mai frecvent, şi anume, *coordonatele cilindrice* şi *coordonatele sferice.*

6.7.1 Coordonatele cilindrice sau semi–polare în spaţiu

Să specificăm poziţia unui punct arbitrar M din spaţiu prin intermediul coordonatei carteziene z şi coordonatele polare r şi φ ale proiecţiei M_1 a punctului M pe planul Oxy. Cantităţile r, φ şi z se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului M. Legătura dintre coordonatele cilindrice şi cele carteziene este uşor de stabilit şi constatăm că este

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{6.57}$$

Avem următoarele trei familii de suprafeţe coordonate corespunzătoare coordonatelor cilindrice:

(α) cilindrii circulari coaxiali cu axa de rotaţie axa cotelor având ecuaţiile de forma $r = \text{const}$ $(0 \leq r < +\infty)$,

(β) semiplane verticale limitate de axa Oz $\varphi = \text{const}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$,

(γ) plane orizontale $z = \text{const}$ $(-\infty < z < +\infty)$.

Analizând suprafeţele coordonate în acest caz constatăm că liniile coordonate în cazul coordonatelor cilindrice sunt: drepte paralele cu axa Oz; semidrepte perpendiculare pe Oz având una din extremităţi pe această axă; cercuri cu centrele pe Oz situate în plane paralele cu planul Oxy.

Jacobianul transformării de la coordonate cilindrice la cele cilindrice este egal cu

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{6.58}$$

Formulele (6.57) care exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice determină o transformare a domeniului

$$0 \le r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty \tag{6.59}$$

situat în spaţiul r, φ, z în întreg spaţiul $Oxyz$. Prin această transformare, fiecare punct de coordonate carteziene $(0,0,z_0)$ corespunde unui întreg segment semi–deschis de forma

$$r = 0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \;\; z = z_0$$

care aparţine domeniului (6.59). Prin urmare, transformarea (6.57) nu este biunivocă în punctele situate pe axa cotelor Oz. Exceptând punctele axei Oz, în toate celelalte puncte ale spaţiului $Oxyz$ corespondenţa (6.57) este biunivocă. În concluzie putem afirma că (6.57) stabileşte o transformare punctuală regulată între domeniul

$$0 < r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty \tag{6.60}$$

situat în spaţiul r, φ, z, în mulţimea obţinută prin scoaterea din spaţiul $Oxyz$ a punctelor situate pe axa cotelor. ■

6.7.2 Coordonatele sferice sau polare în spaţiu

Să fixăm poziţia unui punct oarecare M din spaţiul raportat la reperul cartezian ortogonal $Oxyz$ prin următoarele trei cantităţi:

(α) distanţa ρ de la origine la punctul M,

(β) unghiul θ dintre raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ şi versorul $\mathbf{k}$ al axei Oz,

(γ) unghiul φ format de proiecţia $\overrightarrow{OM_1}$ a razei vectoare $\overrightarrow{OM}$ pe planul Oxy şi versorul $\mathbf{i}$ al axei Ox.

Cantităţile ρ, θ şi φ se numesc *coordonate sferice* ale punctului M. Încercând să determinăm legătura dintre coordonatele carteziene ale punctului M şi cele sferice al aceluiaşi punct, găsim

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\theta. \tag{6.61}$$

Cele trei familii de ale suprafeţelor coordonate corespunzătoare coordonatelor sferice sunt:

(α) sferele concentrice cu centrul în origine $\rho = \text{const}$ $(0 \leq \rho < +\infty)$,

(β) semi–conuri circulare cu vârful în origine şi axa de simetrie Oz $\theta = \text{const}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$,

(γ) semiplane verticale $\varphi = \text{const}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$.

Analizând şi aici suprafeţele coordonate, se constată că liniile coordonate în cazul coordonatelor sferice sunt: cercuri cu centrele pe Oz situate în plane paralele cu planul Oxy, numite *cercuri paralele*; semidrepte cu una din extremităţi în originea O a reperului $Oxyz$, numite *raze vectoare*; semicercuri cu centrele în originea O având diametrele segmente situate pe Oz care se numesc *meridiane*.

Jacobianul transformării coordonatelor carteziene în coordonate sferice este determinantul

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}, \tag{6.62}$$

a cărui valoare este $\rho^2 \sin\theta$.

Formulele (6.61) determină o transformare a domeniului

$$0 \leq \rho < +\infty, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{6.63}$$

(o bandă paralelipipedică semi–infinită) din spaţiul ρ, θ, φ în întreg spaţiul $Oxyz$. Ca şi transformarea corespunzătoare coordonatelor cilindrice, relaţiile (6.61) determină o transformare punctuală biunivocă în toate punctele spaţiului cu excepţia punctelor de pe axa cotelor Oz. Fiecare punct $(0,0,z_0)$ situat pe axa Oz este imaginea prin transformarea (6.61) a segmentului semi–deschis

$$\rho = z_0, \quad \theta = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru} \quad z_0 > 0$$

şi a segmentului semi–deschis

$$\rho = z_0, \quad \theta = \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru} \quad z_0 < 0.$$

Originea $(0,0,0)$ a reperului $Oxyz$ este imaginea prin transformarea (6.61) a intervalului bidimensional

$$\rho = 0, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru} \quad z_0 < 0.$$

Dacă exceptăm punctele axei Oz, relaţiile (6.61) constituie o transformare punctuală regulată care transformă semi–banda paralelipipedică infinită

$$0 < r < +\infty, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{6.64}$$

în domeniul obţinut prin scoaterea axei cotelor din spaţiul $Oxyz$. ■

6.7.3 Coordonate polare (sferice) generalizate

Există şi alte schimbări de variabile, expresiile acestora fiind dictate de contextul în care este formulată problema calculării unei integrale triple.

Alegerea schimbării de variabile întro integrală triplă urmăreşte atât simplificarea domeniului de integrare V (dacă este posibil, Ω să fie un interval tridimensional) cât şi simplificarea funcţiei de integrat sau măcar unul din aceste două obiective. De exemplu, dacă domeniul V este legat în vreun fel de interiorul elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

atunci se trece la *coordonate polare generalizate* numite şi *coordonate sferice generalizate*

$$\begin{cases} x &= a\,\rho\,\sin\theta\,\cos\varphi, \\ y &= b\,\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi, \\ z &= c\,\rho\,\cos\theta. \end{cases} \tag{6.65}$$

Relaţiile (6.65) constituie o transformare punctuală regulată de la submulţimea Ω a intervalului tridimensional nemărginit (6.72) la o mulţime măsurabilă Jordan V din spaţiul $Oxyz$. Jacobianul transformării punctuale regulate (6.65) are valoarea

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = abc\,\rho^2\,\sin\theta,$$

astfel că formula schimbării de variabile întro integrală triplă care foloseşte transformarea punctuală regulată (6.65) este

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= abc \iiint_\Omega f(a\,\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi, b\,\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi, c\,\rho\,\cos\theta)\,\rho^2\,\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi. \tag{6.66}$$

6.7.4 Elementul de volum în coordonate curbilinii

Să găsim expresia elementului de volum în coordonate curbilinii. Considerăm iarăşi mulţimea măsurabilă Jordan V în care am introdus un sistem de coordonate curbilinii prin relaţiile (6.53). Fie $\mathcal{S}$ frontiera lui V, Σ frontiera domeniului Ω şi

$$\begin{cases} u = u(s,t), \\ v = v(s,t), \\ w = w(s,t), \end{cases} \quad (s,t)\in D, \tag{6.67}$$

o reprezentare parametrică a suprafeţei Σ, mulţimea de variaţie a parametrilor curbilinii s şi t fiind compactă în $I\!R^2$. Atunci, suprafaţa $\mathcal{S}$ va fi dată parametric prin

$$\begin{cases} x = x(s,t) = \varphi(u(s,t),v(s,t),w(s,t)), \\ y = y(s,t) = \psi(u(s,t),v(s,t),w(s,t)), \\ z = z(s,t) = \chi(u(s,t),v(s,t),w(s,t)), \end{cases} \quad (s,t)\in D. \tag{6.68}$$

Dacă folosim expresia volumului mulţimii cubabile V cu ajutorul unei integrale de suprafaţă de al doilea tip şi ţinem cont de formula de calcul a acestei integrale de suprafaţă, avem

$$\mathrm{vol}\,V = \iint_{\mathcal{S}} z\,dxdy = \pm\iint_D z(s,t)\,\frac{D(x,y)}{D(s,t)}(s,t)\,dsdt. \tag{6.69}$$

Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse (6.68), se poate verifica prin calcul direct că

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(s,t)} + \frac{D(x,y)}{D(v,w)}\cdot\frac{D(v,w)}{D(s,t)} + \frac{D(x,y)}{D(w,u)}\cdot\frac{D(w,u)}{D(s,t)}$$

şi deci expresia volumului mulţimii V devine

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} V &= \pm \iint\limits_D z\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(s,t)}+ \\ &+ \frac{D(x,y)}{D(v,w)}\cdot\frac{D(v,w)}{D(s,t)}+\frac{D(x,y)}{D(w,u)}\cdot\frac{D(w,u)}{D(s,t)}\Big)(s,t)\,dsdt.\end{aligned}$$

Dacă ţinem cont de regula de calcul a integralei de suprafaţă de al doilea tip obţinem că

$$\operatorname{vol} V = \pm \iint\limits_{\Sigma} z\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv + z\,\frac{D(x,y)}{D(v,w)}\,dvdw + z\,\frac{D(x,y)}{D(w,u)}\,dwdu.$$

Aplicând formula integrală a Gauss–Ostrogradski, se găseşte că expresia volumului mulţimii V este integrala triplă

$$\operatorname{vol} V = \pm \iiint\limits_{\Omega} \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w)\,dudvdw$$

sau, echivalent,

$$\operatorname{vol} V = \iiint\limits_{\Omega} \Big|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\Big|(u,v,w)\,dudvdw$$

Folosind formula de medie pentru integrala triplă, obţinem

$$\operatorname{vol} V = \Big|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\Big|(u_0,v_0,w_0)\operatorname{vol}\Omega$$

Acest rezultat împreună cu procedeul utilizat la demonstraţia formulei de schimbare de variabile în integrala dublă ne conduce la demonstraţia teoremei care dă formula schimbării de variabile în integrala triplă.

6.7.5 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Teorema 6.7.1 *Fie domeniul compact* Ω, *inclus în spaţiul* (u,v,w), *cu frontiera o suprafaţă închisă, netedă pe porţiuni şi*

$$T:\begin{cases} x &= \varphi(u,v,w),\\ y &= \psi(u,v,w),\\ z &= \chi(u,v,w),\end{cases}$$

o transformare punctuală regulată care transportă domeniul Ω *în domeniul* V. *Dacă* $f : V \to I\!R$ *este o funcţie continuă, are loc egalitatea*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$=\iiint_\Omega f\Big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\Big)\Big|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\Big|(u,v,w)dudvdw$$

numită **formula schimbării de variabile în integrala triplă** *sau* **formula de transport**.

Dacă se folosesc coordonatele cilindrice, formula schimbării de variabile devine

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Omega f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz, \tag{6.70}$$

unde Ω este o submulţime a intervalului tridimensional nemărginit

$$[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(-\infty,+\infty).$$

Dacă întro integrală triplă implicăm schimbarea de variabile care utilizează coordonatele sferice, formula schimbării de variabile devine

$$\begin{aligned}&\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz =\\ =&\iiint_\Omega f(\rho\sin\theta\,\cos\varphi,\rho\sin\theta\,\sin\varphi,\rho\,\cos\theta)\,\rho^2\,\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi,\end{aligned} \tag{6.71}$$

unde Ω este o submulţime a intervalului tridimensional nemărginit

$$[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi]. \tag{6.72}$$

Exerciţiul 6.7.1 *Folosind metoda schimbării de variabile în integrala triplă să se calculeze*

$$I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$$

unde V *este bila închisă de rază* R *cu centrul în origine.*

Soluţie. Mulţimea punctelor aparţinând domeniului de integrare au coordonatele carteziene x, y, z astfel încât

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0.$$

Forma domeniului cât şi expresia integrantului sugerează folosirea coordonatelor sferice (6.61). Transformarea punctuală definită cu ajutorul coordonatelor sferice are jacobianul (6.62) astfel că , utilizând formula (6.71), integrala I devine

$$I = \iiint_{\Omega} \rho^4 \, \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi,$$

unde noul domeniu de integrare se vede simplu că este intervalul tridimensional

$$\Omega = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un interval tridimensional, obţinem

$$I = \int_0^R \rho^4 \, d\rho \, \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

De remarcat că, folosind schimbarea de variabile în integrala triplă, valoarea integralei I s–a determinat foarte uşor. ■

Exerciţiul 6.7.2 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

unde V *este mulţimea situată în semispaţiul superior* $z \geq 0$, *conţine o porţiune din semiaxa pozitivă* Oz *şi este delimitată de sferele* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *şi de conul* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluţie. Utilizăm din nou coordonatele sferice. De data aceasta mulţimea V este intervalul tridimensional

$$\Omega = [1, 3] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi).$$

Aplicând formula schimbării de variabile în integrala triplă în cazul când se utilizează coordonatele sferice, găsim

$$I = \iiint_{\Omega} \rho \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi = \int_1^3 \rho \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^3 \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi}.$$

Efectuând calculele finale, constatăm că $I = 4\pi(2 - \sqrt{2})$. ■

Exerciţiul 6.7.3 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dxdydz,$$

unde V este porţiunea din coroana cilindrică mărginită de cilindrii circulari coaxiali $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ şi de planele $z = 0$ şi $z = 1$.

Soluţie. Atât expresia integrantului cât şi forma domeniului V sugerează utilizarea coordonatelor cilindrice (6.57). Noul domeniu de integrare va fi

$$\Omega = [2, 3] \times [0, 2\pi) \times [0, 1].$$

Aplicând formula (6.70), obţinem

$$I = \iiint_{\Omega} r^3 \, drd\varphi dz = \int_2^3 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 dz = 40\pi.$$

Şi în acest exemplu valoarea integralei s–a determinat foarte uşor. ■

Exerciţiul 6.7.4 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint_V \Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big) \, dxdydz,$$

unde mulţimea de integrare V este

$$V = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ 1 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 4\}.$$

Soluţie. În acest caz se folosesc coordonatele polare generalizate definite de (6.65). Mulţimea Ω care, prin transformarea punctuală regulată (6.65), este dusă în mulţimea V din enunţul exemplului este intervalul tridimensional

$$\Omega = \{(\rho,\theta,\varphi) \in I\!R^3 : \; 1 \le \rho \le 2, \; 0 \le \theta \le \pi, \; 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

din spaţiul (ρ,θ,φ). Folosind formula (6.66) deducem că I se calculează cu ajutorul integralei triple

$$I = abc \iiint\limits_{\Omega} \rho^4 \, \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi$$

a cărei valoare se constată simplu că este $I = 4\pi abc/5$. ■

Exerciţiul 6.7.5 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{V} x^2 \, dxdydz,$$

unde V *este domeniul mărginit de suprafeţele:*

$$\begin{aligned} &z = ay^2, \quad z = by^2, \quad (0 < a < b);\\ &z = \alpha x, \quad z = \beta x, \quad (0 < \alpha < \beta);\\ &z = 0, \qquad z = h, \end{aligned}$$

situat în semispaţiul $y > 0$.

Soluţie. Analiza enunţului sugerează schimbarea de variabile

$$u = \frac{z}{y^2}, \quad v = \frac{z}{x}, \quad w = z,$$

domeniile de variaţie ale noilor coordonate fiind

$$u \in [a,b], \quad v \in [\alpha,\beta], \quad z \in [0,h].$$

Rezolvând pe x, y şi z în funcţie de u, v şi w, găsim

$$x = \frac{w}{v}, \quad y = \sqrt{\frac{w}{u}}, \quad z = w.$$

Avem două posibilităţi de a calcula jacobianul care intră în formula schimbării de variabile în integrala triplă. Pe oricare cale se găseşte

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w) = -\frac{1}{2}\frac{w\sqrt{w}}{v^2u\sqrt{u}}.$$

Teorema schimbării de variabile în integrala triplă şi formula de evaluare a integralei triple pe un interval tridimensional închis conduc la concluzia că valoarea integralei I este egală cu produsul integralelor simple de mai jos

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{du}{u\sqrt{u}} \cdot \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v^4} \cdot \int_0^h w^3\sqrt{w}\,dw.$$

Calculând integralele definite obţinem în final că valoarea integralei triple I este

$$I = \frac{2}{27}\Big(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\Big)\, h^4\sqrt{h}.$$

Din nou se remarcă simplificarea evidentă a calculelor când se alege o schimbare de variabile adecvată. ∎

6.8 Aplicaţii ale integralei triple

Considerăm acum unele probleme tipice care implică calculul unor integrale triple.

6.8.1 Calculul volumelor

Dacă o figură spaţială V are volum, valoarea integralei triple

$$\iiint\limits_V dxdydz \tag{6.73}$$

se constată că este volumul lui V. Întradevăr, această afirmaţie rezultă fie din proprietăţile integralei triple fie analizând sumele integrale corespunzătoare unei diviziuni oarecare ocazie cu care se constată că oricare din aceste sume este egală cu volumul lui V şi ca atare limita pentru norma diviziunii tinzând la zero a unui şir de sume integrale corespunzătoare este volumul lui V. Integrala triplă este mai convenabil de folosit decât integrala dublă,

când se pune problema calculării volumului unei figuri spaţiale cubabile căci, după cum se vede din (6.73), cu ajutorul ei se poate determina volumul oricărei mulţimi cubabile, pe când, cu integrala dublă se poate determina doar volumul unui cilindroid.

6.8.2 Masa şi centrul de greutate ale unui solid

În acelaşi mod cum am introdus unele corpuri materiale putem introduce şi aici noţiunea de *solid*. Prin solid se înţelege ansamblul dintre o mulţime măsurabilă Jordan V numită *configuraţia solidului* şi o funcţie ρ reală, cu valori pozitive, continuă pe V, care se numeşte *densitatea de volum* a solidului.

Dacă funcţia ρ este constantă, solidul se numeşte *omogen*. În cazul solidului omogen masa sa este dată de produsul dintre valoarea constantă ρ_0 a densităţii şi volumul lui V.

Produsul dintre valoarea densităţii întrun punct $M(x, y, z) \in V$ şi elementul de volum al lui V se numeşte *element de masă* şi se notează cu dm. Deci

$$dm = \rho(x, y, z)\, dxdydz. \tag{6.74}$$

Procedând asemănător ca la firul material, placa materială sau pânza materială constatăm că masa solidului definit mai sus este dată de egalitatea

$$\operatorname{masa} V = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz \tag{6.75}$$

sau de egalitatea

$$\operatorname{masa} V = \iiint_V dm. \tag{6.76}$$

Coordonatele x_G, y_G şi z_G ale centrului de greutate G al unui solid de configuraţie V şi densitatea de volum ρ sunt date de egalităţile

$$\begin{gathered} x_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint_V x\, dm, \quad y_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint_V y\, dm, \\ z_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint_V z\, dm. \end{gathered} \tag{6.77}$$

Dacă notăm cu $\mathbf{r}_G$ vectorul de poziţie a centrului de greutate şi cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct curent $M(x,y,z) \in V$, constatăm că relaţiile (6.77) se pot scrie în forma vectorială

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint_V \mathbf{r}\, dm. \tag{6.78}$$

În cazul solidului omogen expresiile coordonatelor centrului de greutate sunt mai simple căci fracţiile de mai sus se pot simplifica prin valoarea constantă ρ_0 a densităţii. Avem

$$\begin{gathered} x_G = \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iiint_V x dv, \quad y_G = \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iiint_V y dv, \\ z_G = \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iiint_V z dv, \end{gathered} \tag{6.79}$$

unde $dv = dxdydz$ este elementul de volum al lui V. Forma vectorială a acestor egalităţilor (6.79) este

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iiint_V \mathbf{r}\, dv. \tag{6.80}$$

6.8.3 Momente de inerţie ale unui solid

Momentele de inerţie faţă de axele Ox, Oy, Oz ale solidului de configuraţie V şi densitate de volum ρ, se vor nota cu aceleaşi simboluri ca la pânze materiale şi sunt date de egalităţile:

$$\begin{cases} I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\, dv = \iiint_V (y^2+z^2) dm; \\ I_y = \iiint_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\, dv = \iiint_V (z^2+x^2) dm; \\ I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\, dv = \iiint_V (x^2+y^2) dm. \end{cases} \tag{6.81}$$

Când densitatea de volum este constantă şi egală cu $\rho_0 > 0$, formulele de

mai sus devin

$$I_x = \rho_0 \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, dv; \quad I_y = \rho_0 \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\, dv;$$
$$I_z = \rho_0 \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dv.$$

Momentele de inerţie ale solidului neomogen de configuraţie V şi densitate de volum în raport cu planele de coordonate Oxy, Oyz, Ozx, notate corespunzător cu I_{xy}, I_{yz} şi I_{zx}, au expresiile date de integralele triple:

$$\begin{cases} I_{xy} &= \displaystyle\iiint\limits_V \rho\, z^2\, dv &= \displaystyle\iiint\limits_V z^2\, dm; \\ I_{yz} &= \displaystyle\iiint\limits_V \rho\, x^2\, dv &= \displaystyle\iiint\limits_V x^2\, dm; \\ I_{xz} &= \displaystyle\iiint\limits_V \rho\, y^2\, dv &= \displaystyle\iiint\limits_V y^2\, dm. \end{cases} \tag{6.82}$$

Dacă solidul este omogen cu densitatea constantă ρ_0, în locul formulelor (6.82) avem

$$I_{xy} = \rho_0 \iiint\limits_V z^2\, dv; \quad I_{yz} = \rho_0 \iiint\limits_V x^2\, dv; \quad I_{xz} = \rho_0 \iiint\limits_V y^2\, dv.$$

În fine, momentul de inerţie în raport cu originea reperului este

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dm, \tag{6.83}$$

când solidul este neomogen, iar în cazul că ar fi omogen acelaşi moment de inerţie al solidului va fi dat de expresia

$$I_O = \rho_0 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dv.$$

6.8.4 Potenţialul newtonian al unui solid

Potenţialul newtonian sau gravitaţional al unui punct material de masă m se defineşte prin formula

$$U = \frac{m}{r},$$

unde r este distanţa de la punctul material până la punctul din spaţiu în care se consideră potenţialul. În cazul unui solid de configuraţie V şi densitate de volum ρ, *potenţialul newtonian în punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ va fi dat de formula:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_V \frac{\rho(x, y, z)\, dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

6.8.5 Atracţia exercitată de către un solid

Se ştie din fizică că fiind date două puncte materiale M_1 şi M_2 de ponderi m_1 şi m_2 şi vectori de poziţie $\mathbf{r}_1$ şi respectiv $\mathbf{r}_2$, mărimea forţei de atracţie dintre cele două puncte materiale este dată de formula

$$F = \lambda \frac{m_1\, m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2},$$

unde λ este o constantă, iar

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

este distanţa euclidiană dintre punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Forţa $\mathbf{F}_{12}$ cu care punctul material M_1 este atras de către punctul material M_2 este dată de formula

$$\mathbf{F}_{12} = \lambda \frac{m_1\, m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}\, (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Dacă X_{12}, Y_{12}, Z_{12} sunt coordonatele forţei de atracţie, expresiile acestora sunt date de

$$X_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(x_2 - x_1),\ Y_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(y_2 - y_1),$$

$$Z_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(z_2 - z_1).$$

Să considerăm acum un punct material $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de masă m şi un solid de configuraţie V şi densitate de volum ρ. Având la dispoziţie cazul particular prezentat mai sus şi cunoscând mecanismul introducerii noţiunii de integrală triplă ajungem la concluzia că forţa $\mathbf{F}$ cu care M_0 este atras de către solid este dată de integrala triplă

$$\mathbf{F} = \lambda\, m \iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\, dxdydz,$$

unde

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},$$

iar $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|$ este norma euclidiană a vectorului $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Coordonatele F_x, F_y şi F_z ale vectorului $\mathbf{F}$ sunt

$$\begin{cases} F_x &= \lambda\, m \displaystyle\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(x-x_0)\, dxdydz, \\ F_y &= \lambda\, m \displaystyle\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(y-y_0)\, dxdydz, \\ F_z &= \lambda\, m \displaystyle\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(z-z_0)\, dxdydz. \end{cases}$$

Exerciţiul 6.8.1 *Să se calculeze cu ajutorul integralei triple, volumul figurii spaţiale V situată în semispaţiul superior $z \geq 0$ şi mărginită de suprafeţele:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

unde $0 < a < b$.

Soluţie. Cele trei suprafeţe care mărginesc figura spaţială V sunt: primele două, sfere concentrice cu centrul în origine, de raze a şi b; iar a treia, con circular cu vârful în origine şi axa de rotaţie axa Oz, având generatoarele înclinate cu 45 de grade faţă de axa Oz. Corpul este porţiunea din coroana sferică limitată de cele două sfere conţinută în pânza superioară a conului. Volumul acestei figuri este $\operatorname{Vol} V = \iiint\limits_V dxdydz$, iar pentru calculul integralei

triple folosim coordonatele sferice. Terna ordonată (ρ, θ, φ) ia valori în intervalul tridimensional închis $\Omega = [a, b] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$, iar jacobianul transformării este $J = \rho^2 \sin\theta$. Prin urmare, avem

$$\mathrm{Vol}\, V = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_a^b \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}.$$

■

Exercițiul 6.8.2 *Să se afle coordonatele centrului de greutate al unui solid omogen mărginit de pânza unui con circular drept, având unghiul de la vârf egal cu 2α și de o sferă de rază R cu centrul în vârful conului.*

Soluție. Alegem originea sistemului de axe în vârful conului și axa Oz după axa de simetrie a conului.

Trebuie determinată mai întâi masa solidului V. Fiind omogen și considerând că densitatea este egală cu unitatea, masa solidului va fi egală cu volumul său. Pentru calculul volumului folosim coordonatele sferice în care terna (ρ, θ, φ) ia valori în intervalul tridimensional închis $\Omega = [0, R] \times [0, \alpha] \times [0, 2\pi]$. Avem

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\, V &= \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Coordonatele x_G, y_G și z_G ale centrului de greutate G al solidului sunt date de integralele triple:

$$x_G = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint\limits_V x dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint\limits_V y dx dy dz,$$

$$z_G = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint\limits_V z dx dy dz.$$

Solidul fiind omogen și având planele de coordonate Oxz și Oyz ca plane de simetrie, rezultă că $x_G = y_G = 0$. Pentru calculul integralei triple de la

numărătorul cotei centrului de greutate trecem la coordonate sferice. Avem

$$\iiint\limits_V z dx dy dz = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\alpha \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Prin urmare, $z_G = \dfrac{3R}{4} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$. ■

Exerciţiul 6.8.3 *Să se găsească momentul de inerţie în raport cu axa Oz a solidului de configuraţie bila de rază a cu centrul în origine V şi densitatea de volum*

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Soluţie. Momentul de inerţie de determinat este în acest caz

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\, dx dy dz.$$

Pentru calculul integralei triple trecem la coordonate sferice şi găsim

$$I_z = \iiint\limits_\Omega \rho^6 \sin^3 \theta \, d\rho d\theta d\varphi,$$

unde Ω este intervalul tridimensional $[0, a] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Scriind ultima integrală triplă ca o iteraţie de integrale simple, obţinem

$$I_z = \int_0^a \rho^6 \, d\rho \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Efectuând integralele simple de mai sus găsim $I_z = 8\pi\, a^7/21$. ■

Exerciţiul 6.8.4 *Să se determine momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale solidului omogen având configuraţia domeniului V mărginit de suprafeţele de ecuaţii $z = c > 0$ şi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, situat în semispaţiul $z \geq 0$.*

Soluţie. Considerând că $\rho_0 = 1$, cele trei momente de inerţie cerute sunt:

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 dx dy dz; \quad I_{zx} = \iiint\limits_V y^2 dx dy dz; \quad I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 dx dy dz,$$

unde domeniul de integrare este porţiunea din interiorul pânzei superioare a conului de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, situat sub planul $z=c$.

Pentru calculul fiecărei din cele trei integrale vom folosi faptul că domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz, deoarece el se poate scrie ca

$$V=\Big\{(x,y,z)\in I\!R^3\;:\;c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\le z\le c,\;(x,y)\in D_{xy}\Big\},$$

unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy, care se poate reprezenta ca

$$D_{xy}=\Big\{(x,y)\in I\!R^2\;:\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\Big\}.$$

Cu alte cuvinte, D_{xy} este domeniul plan mărginit de elipsa din planul Oxy, cu centrul de simetrie în originea reperului $Oxyz$ şi semiaxele egale cu a şi b. Vom scrie integralele triple care dau momentele de inerţie faţă de planele de coordonate ca iteraţii de integrale, prima simplă, în raport cu z, între limitele $c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$ şi c, iar a doua, dublă, pe domeniul D_{xy}. Avem:

$$I_{yz}=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}dz=c\iint\limits_{D_{xy}}x^2\Big(1-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\Big)dxdy;$$

$$I_{zx}=\iint\limits_{D_{xy}}y^2dxdy\int_{c\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}dz=c\iint\limits_{D_{xy}}y^2\Big(1-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\Big)dxdy;$$

$$I_{xy}=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}z^2dz=\frac{c^3}{3}\iint\limits_{D_{xy}}\Big(1-\sqrt{\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)^3}\Big)dxdy.$$

Aceste integrale duble se calculează utilizând coordonatele polare generalizate în plan şi găsim:

$$I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20};\quad I_{zx}=\frac{\pi ab^3c}{20};\quad I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}.$$

■

Capitolul 7

Ecuaţii diferenţiale ordinare

7.1 Câteva generalităţi despre ecuaţii diferenţiale ordinare

În cele ce urmează I este un interval din mulţimea $I\!R$ a numerelor reale, Y este o mulţime oarecare a spaţiului $I\!R^{n+1}$, $n \in I\!N^*$, şi

$$F : I \times Y \to I\!R$$

este o funcţie reală continuă, de $n+2$ variabile reale, având ca argumente variabila reală $x \in I$, funcţia reală $y : I \to I\!R$ şi derivatele sale până la ordinul n inclusiv $y', y'', \cdots, y^{(n)}$.

Definiţia 7.1.1 *Relaţia*

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială ordinară, de ordinul** n, *dacă se cere să se determine funcţiile*

$$\varphi : I \to I\!R, \tag{7.2}$$

derivabile până la ordinul n inclusiv, astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad (\forall)\, x \in I. \tag{7.3}$$

Definiţia 7.1.2 *Funcţia reală de variabila reală* (7.2), *de n ori derivabilă, care satisface identitatea* (7.3) *se numeşte* **soluţie** *a ecuaţii diferenţiale* (7.1).

Presupunând că este posibilă rezolvarea în raport cu derivata de ordinul n, ecuaţia (7.1) se poate reduce la *forma explicită* sau *forma normală*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{7.4}$$

Definiţia 7.1.3 *Ecuaţia diferenţială corespunzătoare cazului $n = 1$ se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul întâi**.

Observaţia 7.1.1 *Forma implicită a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi este*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{7.5}$$

iar forma normală sau forma explicită a sa este

$$y' = f(x, y). \tag{7.6}$$

Deoarece ecuaţiile diferenţiale reprezintă în multe situaţii modelarea matematică a unor fenomene evolutive şi că aceste fenomene sunt în general continue, vom presupune că funcţia F din ecuaţiile (7.1) şi (7.5) precum şi funcţia f din (7.4) şi (7.6) sunt continue pe domeniile lor de definiţie.

Exemplul 7.1.1 *Ecuaţia*

$$y' = \sin x$$

are familia de soluţii

$$y = \varphi(x, C) = -\cos x + C, \quad x \in I\!R,$$

unde C este o constantă arbitrară. ■

Exemplul 7.1.2 *Fie f o funcţie reală de variabilă reală, definită şi continuă pe un interval $I \subset I\!R$. Toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul întâi*

$$y' = f(x) \tag{7.7}$$

sunt de forma

$$\varphi(\cdot, C) : I \to I\!R, \quad \varphi(x, C) = C + \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{7.8}$$

Într-adevăr, f fiind funcţie continuă pe I, este integrabilă şi admite primitive pe I. A determina primitivele funcţiei f înseamnă a găsi toate funcţiile y, definite şi derivabile pe I, care satisfac egalitatea (7.7). Cu alte cuvinte, primitivele funcţiei f sunt soluţiile ecuaţiei diferenţiale (7.7).

Se ştie că funcţia

$$F : I \to I\!R, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad (\forall)\, x \in I, \quad x_0 \in I, \text{ fixat}, \tag{7.9}$$

este o primitivă pe I a funcţiei f şi că orice două primitive ale lui f diferă printr–o constantă arbitrară C. De aici deducem că toate primitivele funcţiei f se pot scrie în forma

$$y = C + \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{7.10}$$

În acest caz, funcţiile (7.8), deduse din (7.10) pentru fiecare valoare a constantei arbitrare C, reprezintă toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale (7.7). ■

Exemplul 7.1.3 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$y = xy' + y'^{\,2} \tag{7.11}$$

are ca soluţii funcţiile

$$y = Cx + C^2, \quad x \in I\!R, \tag{7.12}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Într-adevăr, prin verificare directă se constată că, oricare ar fi valoaraea constantei C, funcţia din membrul al doilea al relaţiei (7.12) verifică identic ecuaţia diferenţială (7.11).

Din punct de vedere geometric, relaţia (7.12) reprezintă o familie de drepte cu panta variabilă C şi ordonata la origine egală cu C^2. Pentru $C = 1$, din (7.12) obţinem soluţia

$$y = x + 1 \tag{7.13}$$

care în reperul Oxy este o dreaptă paralelă cu prima bisectoare. ■

Exemplele de mai sus conduc la introducerea unei alte noţiuni.

Definiţia 7.1.4 *Dacă soluţiile ecuaţiei* (7.5) *sau* (7.6) *se pot pune sub forma*

$$y = \varphi(x, C), \quad x \in I, \tag{7.14}$$

unde C este o constantă arbitrară, atunci (7.14) *se numeşte* **soluţia generală** *a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare.*

Definiţia 7.1.5 *Se numeşte* **soluţie particulară** *a ecuaţiei diferenţiale ordinare* (7.5) *sau* (7.6) *funcţia*

$$y = \varphi(x, C_0), \quad x \in I, \tag{7.15}$$

obţinută din soluţia generală (7.14) *prin atribuirea valorii concrete* C_0 *constantei arbitrare* C.

Observaţia 7.1.2 *Ecuaţia* (7.7) *are soluţia generală* (7.10). *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale* (7.11) *este* (7.12), *iar* (7.13) *reprezintă o soluţie particulară a acesteia. Funcţia*

$$y = -\frac{1}{4}x^2, \quad x \in I\!R,$$

este , de asemenea, soluţie a ecuaţiei diferenţiale (7.11) *care nu se poate obţine din soluţia generală.*

Definiţia 7.1.6 *O soluţie a ecuaţiei diferenţiale* (7.5) *sau* (7.6) *care nu se poate obţine din soluţia generală a acesteia prin particularizarea constantei arbitrare se numeşte* **soluţie singulară**.

O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi are drept grafic o curbă plană numită *curbă integrală*. Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale este o familie uniparametrică de curbe integrale.

Este posibil ca soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (7.5) să se scrie în forma

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{7.16}$$

Relaţia (7.16) se numeşte *integrala generală* a ecuaţiei diferenţiale (7.5) sau (7.6).

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale poate fi dată şi *parametric*, printr–un sistem de forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C)\,, \\ y = \psi(t, C)\,. \end{cases} \tag{7.17}$$

Observaţia 7.1.3 *Ecuaţia diferenţială* (7.5) *poate avea mai multe soluţii generale. De exemplu, ecuaţia diferenţială*

$$y'^2 = f(x),$$

unde f este continuă şi nenegativă pe un interval real I, are două soluţii generale

$$y = C_1 + \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(t)}\, dt \quad \text{şi} \quad y = C_2 - \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(t)}\, dt.$$

Presupunem că $Q : D \subset I\!R^2 \to I\!R \setminus \{0\}$ este o funcţie continuă. Dacă înmulţim ambii membri ai ecuaţiei diferenţiale (7.6) cu factorul nenul $Q(x, y)$ găsim ecuaţia diferenţială echivalentă

$$Q(x, y)y' - Q(x, y)\, f(x, y) = 0. \tag{7.18}$$

Notând

$$P(x, y) = -\, Q(x, y)\, f(x, y) \tag{7.19}$$

şi utilizând pentru derivata unei funcţii notaţia lui Leibniz

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{7.20}$$

ecuaţia diferenţială se transcrie în forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \quad P, Q \in C^0(D). \tag{7.21}$$

Când expresia din membrul întâi a ecuaţiei (7.21) este diferenţiala unei funcţii reale de două variabile, pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^2$, acesteia i se spune *expresie diferenţială exactă.* Se poate afirma că (7.21) este o alternativă de prezentare a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală (7.6) care, cu notaţia (7.20), se poate prezenta sub forma echivalentă

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{7.22}$$

Alternativa mai sus prezentată are avantajul că, la nevoie, putem considera y ca variabila independentă, caz în care ecuaţia diferenţială corespunzătoare se scrie

$$\frac{dx}{dy} = g(y, x), \quad \text{unde} \quad g(y, x) = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{7.23}$$

funcţia necunoscută fiind x.

Fiecărui punct $(x_0, y_0) \in D$ îi corespunde o direcţie de coeficient unghiular

$$y_0' = f(x_0, y_0);$$

fiecărei direcţii îi corespunde o dreaptă

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

care trece prin punctul (x_0, y_0) şi are panta $m = y_0'$; prin urmare, ecuaţia (7.22) asociază fiecărui punct din D o direcţie (dreaptă); avem astfel în D definit un câmp f de direcţii.

Să presupunem că $y = \varphi(x),\ (x, y) \in D$ este o soluţie a ecuaţiei (7.6). Graficul funcţiei φ este o curbă integrală în D care are proprietatea că, în fiecare punct al ei, tangenta are ca direcţie valoarea câmpului f în punctul considerat.

Definiţia 7.1.7 *Problema determinării soluţiei* (7.2) *a ecuaţiei diferenţiale* (7.6) *care pentru* $x = x_0$ *ia valoarea dată* y_0, *se numeşte* **problema Cauchy**, *iar condiţia*

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{7.24}$$

se numeşte **condiţie iniţială** *sau* **dată iniţială**.

Observaţia 7.1.4 *Din punct de vedere geometric, problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială* (7.6), *cu condiţia iniţială* (7.24), *înseamnă determinarea acelei curbe integrale a ecuaţiei diferenţiale* (7.6) *care trece prin punctul de coordonate* (x_0, y_0).

Exemplul 7.1.4 *Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială* (7.7) *cu condiţia iniţială* (7.24), *este*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{7.25}$$

Într-adevăr, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (7.7) am văzut că este (7.10). Dacă vom căuta soluţia care pentru $x = x_0$ ia valoarea y_0, vom obţine

$$y_0 = C + \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = C, \tag{7.26}$$

deci $C = y_0$. ■

Observaţia 7.1.5 *Formula* (7.25) *arată că* $(\forall)\ (x_0, y_0) \in I \times I\!R$ *există o soluţie unică a ecuaţiei* (7.7) *care satisface condiţia iniţială* $y(x_0) = y_0$. *Cu alte cuvinte, prin orice punct din intervalul nemărginit bidimensional* $I \times I\!R$ *trece o curbă integrală şi numai una.*

Teorema de mai jos arată în ce condiţii soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (7.6) cu condiţia iniţială (7.24) există şi este unică.

Teorema 7.1.1 *Presupunem verificate următoarele condiţii:*

- *funcţia reală f este definită şi continuă pe intervalul închis bidimensional*
$$I_2 = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\};$$
- *funcţia f este lipschitziană ca funcţie de y pe mulţimea I_2, adică există o constantă pozitivă L astfel încât*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \ (\forall) \ (x, y_1), \, (x, y_2) \in I_2. \qquad (7.27)$$

În aceste condiţii, există o soluţie unică $y = y(x)$ a problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (7.6) *cu condiţia iniţială* (7.24), *definită pe intervalul* $|x - x_0| \le \delta$, *unde*

$$\delta = \inf\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}; \ \ M = \sup\{|f(x, y)| : \ (x, y) \in I_2\}.$$

Desigur, soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia (7.6), cu condiţia iniţială (7.24), este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală (7.6).

Aşadar, mulţimea soluţiilor tuturor problemelor Cauchy ale ecuaţiei diferenţiale (7.6) constituie soluţia generală a ecuaţiei (7.6) în domeniul D.

Totalitatea soluţiilor particulare ale unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub forma normală depinde de o constantă arbitrară. Putem arăta că, invers, orice familie de curbe plane

$$g(x, y, C) = 0, \quad (x, y) \in D, \qquad (7.28)$$

cu g continuă şi derivabilă parţial în D, verifică în D o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul întâi. Într-adevăr, considerând că în (7.28) y este funcţie car e depinde de x şi derivând în raport cu variabila x, avem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, C) + y' \, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, C) = 0. \qquad (7.29)$$

Eliminarea constantei C din relaţiile (7.28) şi (7.29) conduce la o ecuaţie diferenţială de forma (7.5).

Exerciţiul 7.1.1 *Să se determine ecuaţia diferenţială a familiei de curbe*

$$y = Cx + f(C). \tag{7.30}$$

Soluţie. Derivând în raport cu x în (7.30), găsim $y' = C$. Eliminând constanta C între acest rezultat şi (7.30) obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$y = xy' + f(y'), \tag{7.31}$$

care se numeşte *ecuaţie diferenţială de tip Clairaut.* ■

Definiţia 7.1.8 *Prin* **problemă Cauchy asociată ecuaţiei diferenţiale de ordinul** n (7.4) *se înţelege determinarea unei funcţii* $y = \varphi(x)$ *care satisface ecuaţia*

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x)), \;\; (\forall)\; x \in I \subset I\!R \tag{7.32}$$

şi verifică condiţiile iniţiale

$$\varphi(x_0) = y_1^0,\;\; \varphi'(x_0) = y_2^0,\;\; \cdots,\;\; \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \tag{7.33}$$

unde $x_0 \in I$ *şi* $y_1^0,\, y_2^0, \cdots, y_n^0$ *sunt fixate.*

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n sub formă normală (7.4) şi să presupunem că s–a obţinut o soluţie

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{7.34}$$

care depinde de n constante $C_1,\, C_2,\, \cdots,\, C_n$.

Definiţia 7.1.9 *Dacă funcţia* (7.34) *are următoarele proprietăţi:*

1. *este soluţie a ecuaţiei diferenţiale* (7.4) *oricare ar fi punctul de coordonate* $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ *luat dintr–un anumit domeniu* $\Delta \subset I\!R^n$;

2. *există şi este unică* $n-$*upla* $(C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0) \in \Delta$ *astfel încât*

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0)$$

să fie soluţia problemei Cauchy a ecuaţiei diferenţiale (7.4), *cu condiţiile iniţiale* (7.33), *unde*

$$(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$$

este un punct oarecare din mulţimea $D \subset I\!R^{n+1}$, *domeniul de definiţie al funcţiei* f *din membrul doi a ecuaţiei diferenţiale* (7.4),

atunci (7.34) *se numeşte* **soluţia generală** *a ecuaţiei diferenţiale* (7.4) *în domeniul* D.

Definiţia 7.1.10 *A* **integra** *o ecuaţie diferenţială înseamnă a determina toate soluţiile sale.*

7.2 Ecuaţii diferenţiale ordinare, de ordinul întâi, integrabile prin cuadraturi

În cele ce urmează vom prezenta câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi ale căror soluţii generale se pot determina prin operaţii de integrare sau cuadrare.

7.2.1 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separate

Definiţia 7.2.1 *O ecuaţie diferenţială de tipul*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \tag{7.35}$$

unde $P : I_1 \to I\!R$ *şi* $Q : I_2 \to I\!R$ *sunt funcţii reale continue date pe intervalele reale* I_1 *şi* I_2, *se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară, de ordinul întâi, cu variabile separate**.

Teorema 7.2.1 *Funcţia* $F : I_1 \times I_2 \to I\!R$, *cu valorile date de*

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt, \quad (x_0, y_0) \in I_1 \times I_2, \tag{7.36}$$

este diferenţiabilă pe interiorul mulţimii $I_1 \times I_2$ *şi are proprietatea*

$$dF(x,y) = P(x)dx + Q(y)dy. \tag{7.37}$$

Demonstraţie. Existenţa lui F este asigurată de continuitatea funcţiilor P şi Q. În plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} P(t)dt = P(x),\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{d}{dy}\int_{y_0}^{y} Q(t)dt = Q(y). \end{aligned} \tag{7.38}$$

Având în vedere că

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy, \tag{7.39}$$

din (7.38) şi (7.39) rezultă (7.37). ■

Teorema 7.2.2 *Fiecare soluţie*

$$y = \varphi(x), \tag{7.40}$$

a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35), *cu graficul cuprins în* $I_1 \times I_2$, *satisface relaţia*

$$F(x, \varphi(x)) = C \tag{7.41}$$

pentru o anumită constantă C. *Reciproc, dacă ecuaţia* $F(x,y) = C$ *defineşte pe* y *ca funcţie implicită diferenţiabilă de variabila* x, *atunci această funcţie este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate* (7.35).

Demonstraţie. Presupunem că

$$y = \varphi(x), \quad x \in (a,b) \subset I_1 \tag{7.42}$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35) astfel încât să avem

$$(x, \varphi(x)) \in I_1 \times I_2, \quad (\forall)\, x \in (a,b). \tag{7.43}$$

Să arătăm că

$$F(x, \varphi(x)) = C, \quad (\forall)\, x \in (a,b). \tag{7.44}$$

Pentru aceasta considerăm funcţia compusă

$$g : (a,b) \to I\!R, \quad g(x) = F(x, \varphi(x)) \tag{7.45}$$

şi derivata ei

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x). \tag{7.46}$$

Folosind acum în (7.46) rezultatul (7.38) precum şi varianta

$$P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad (\forall)\, x \in (a,b) \tag{7.47}$$

a faptului că (7.42) este o soluţie a ecuaţiei (7.35), deducem

$$g'(x) = P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad (\forall)\, x \in (a, b). \tag{7.48}$$

Relaţia (2.13) arată că funcţia g este o constantă pe intervalul (a, b). Astfel, orice soluţie y a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35) satisface ecuaţia carteziană implicită (7.44).

Să presupunem acum că ecuaţia $F(x, y) = C$ defineşte pe y ca funcţie implicită diferenţiabilă de x pe $(a, b) \in I_1$. Ecuaţia (7.44) implică faptul că funcţia g din (7.45) este constantă pe (a, b). Rezultă

$$0 = g'(x) = P(x) + Q(y)y'. \tag{7.49}$$

Dând deoparte pe $g'(x)$ din (7.49) deducem că y este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35). ∎

Teoremele precedente sugerează un procedeu practic de găsire a soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35).

Familia de ecuaţii carteziene implicite

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = C, \ (\forall)\ (x, y) \in I_1 \times I_2, \tag{7.50}$$

unde (x_0, y_0) este un punct fixat din intervalul bidimensional $I_1 \times I_2$, descrie curbele integrale ale ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35). Dacă impunem ca valorii $x = x_0$ să –i corespundă $y = y_0$, din (7.50) rezultă $C = 0$ şi deci soluţia problemei Cauchy a ecuaţiei diferenţiale (7.35), cu condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, există şi este unică. Această soluţie este funcţia definită implicit de ecuaţia

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = 0. \tag{7.51}$$

Exerciţiul 7.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{y + 1} = 0, \quad (x, y) \in (-1, 1) \times (-1, +\infty). \tag{7.52}$$

Soluţie. Aplicând rezultatele de mai sus avem că soluţia generală a ecuaţiei (7.52) este

$$\arcsin x + \ln (y + 1) = C. \tag{7.53}$$

Să observăm că ecuaţia are şi soluţia $y = -1$; ea se obţine din integrala generală (7.53) pentru $C \to -\infty$. ∎

7.2.2 Ecuaţia diferenţială exactă

Fie $D \subset I\!R^2$ un domeniu plan simplu conex, şi $P : D \to I\!R$, $Q : D \to I\!R$ două funcţii continue derivabile parţial, prima în raport cu y, iar a doua în raport cu variabila x.

Definiţia 7.2.2 *O ecuaţie diferenţială de tipul*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{7.54}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială exactă** *dacă funcţiile P şi Q satisfac în D condiţia*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad (\forall)\ (x, y) \in D. \tag{7.55}$$

Teorema 7.2.3 *Ecuaţia diferenţială exactă* (7.54) *are soluţia generală*

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt = C. \tag{7.56}$$

Demonstraţie. Fie $A(x_0, y_0) \in D$, fixat astfel încât luând un punct oarecare $M(x, y)$ al domeniului şi notând cu B punctul de coordonate (x, y_0), segmentele de dreaptă AB şi BM să fie incluse în D. Să considerăm funcţia $F : D \to I\!R$ ale cărei valori se calculează după regula

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt. \tag{7.57}$$

Folosind regula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru constatăm

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y), \quad (\forall)\ (x, y) \in D. \tag{7.58}$$

Deoarece funcţiile P şi Q sunt continue, deducem că F are derivate parţiale continue şi deci este funcţie diferenţială pe D. Ţinând cont de expresia diferenţialei de ordinul întâi şi de (7.58), deducem

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (\forall)\ (x, y) \in D. \tag{7.59}$$

Aşadar, membrul întâi al ecuaţiei (7.55) este diferenţiala funcţiei F din (7.57). Din acest motiv denumirea ecuaţiei diferenţiale (7.54) este acea de ecuaţie diferenţială exactă.

Folosind acum (7.54) şi (7.59), avem

$$dF(x,y) = 0, \quad (\forall)\,(x,y) \in D,$$

de unde

$$F(x,y) = C, \quad (\forall)\,(x,y) \in D. \tag{7.60}$$

Ţinând seama de (7.57) şi (7.60) deducem că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale exacte (7.54) este (7.56). ■

Corolarul 7.2.1 *Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială exactă* (7.54), *cu condiţia iniţială* $y(x_0) = y_0$, *unde* $(x_0, y_0) \in D$, *este*

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = 0. \tag{7.61}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, alegând ca datele iniţiale x_0 şi y_0 să fie coordonatele punctului A, şi impunând condiţia ca pentru $x = x_0$ să avem $y = y_0$, din (7.56) deducem $C = 0$. Ca urmare, soluţia căutată este funcţia $y = \varphi(x)$ definită implicit de ecuaţia (7.61). ■

Exerciţiul 7.2.2 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$$

Soluţie. Aici $P(x,y) = 3x^2 y + \sin x, \;\; Q(x,y) = x^3 - \cos y, \;\; (x,y) \in I\!R^2$. Aceste funcţii sunt derivabile şi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3x^2.$$

Derivatele parţiale de mai sus fiind egale, ecuaţia dată este ecuaţie diferenţială exactă. Luând drept punct $A(x_0, y_0)$ originea reperului cartezian Oxy, deci $x_0 = 0, \; y_0 = 0$, şi aplicând (7.56), deducem că soluţia generală a ecuaţiei date este

$$\int_0^x \sin t\, dt + \int_0^y (x^3 - \cos t)\, dt = C.$$

Efectuând integrările care se impun mai sus, găsim că soluţia generală a ecuaţiei date este

$$\cos x + \sin y - x^3 y + C - 1 = 0, \quad (\forall)\;\, (x,y) \in I\!R^2.$$

Din punct de vedere geometric, soluţia generală este o familie de curbe plane care umple tot planul. Prin fiecare punct al planului trece o curbă integrală şi numai una. De exemplu, dacă dorim să rezolvăm problema Cauchy a ecuaţiei date cu condiţiiniţială $y(0) = 0$, adică să determinăm curba integrală care trece prin origine, găsim $C = 0$ şi deci soluţia căutată este

$$\cos x + \sin y - x^3 y - 1 = 0.$$

Funcţia reală definită implicit, în vecinătatea originii, de această ecuaţie este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale căci a fost obţinută din cea generală luând pentru constanta C valoarea $C = 0$. ■

7.2.3 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi care admit factor integrant

Fie ecuaţia diferenţială

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{7.62}$$

unde $P : D \to I\!R$, $Q : D \to I\!R$ sunt două funcţii reale diferenţiabile pe un domeniu plan $D \subset I\!R^2$. Dacă expresia diferenţială $Pdx + Qdy$ nu este o diferenţială exactă, adică nu este îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad (\forall)\ (x, y) \in D, \tag{7.63}$$

atunci ne propunem să căutăm o funcţie $\mu : D \to I\!R^2$ astfel încât expresia diferenţială

$$\omega = \mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy$$

să fie o diferenţială totală exactă a unei funcţii reale de două variabile reale. Pentru aceasta, conform lui (7.63), ar trebui să fie îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x, y)Q(x, y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x, y)P(x, y)\Big), \quad (\forall)\ (x, y) \in D. \tag{7.64}$$

Definiţia 7.2.3 *Funcţia $\mu : D \to I\!R^2$, diferenţiabilă pe $D \subset I\!R^2$, care verifică ecuaţia* (7.64), *se numeşte* **factor integrant** *al ecuaţiei* (7.62).

Prin înmulţirea ecuaţiei (7.62) cu factorul integrant μ care satisface (7.64), ecuaţia (7.62) devine

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0. \tag{7.65}$$

Pentru ca (7.65) să fie o ecuaţie diferenţială cu diferenţială totală exactă trebuie să fie îndeplinită relaţia (7.64), care, după efectuarea derivatelor parţiale, devine

$$Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mu(x,y) = 0. \tag{7.66}$$

Relaţia (7.66) este o *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi, liniară şi neomogenă*, căreia, în anumite cazuri, i se poate determina o soluţie particulară.

De exemplu, dacă o să căutăm un factor integrant care să fie funcţie numai de x, adică $\mu = \mu(x)$, deoarece $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, ecuaţia (7.65) se reduce la

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) \tag{7.67}$$

şi determinarea lui μ este posibilă dacă $\dfrac{1}{Q}\Big(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\Big)$ este funcţie numai de x. Într-adevăr, în (7.67) variabilele se separă şi obţinem pe μ printr–o operaţie de integrare

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)dx. \tag{7.68}$$

După determinarea factorului integrant $\mu = \mu(x)$ (numai dacă acest lucru este posibil) se înmulţesc ambii membri ai ecuaţiei (7.62) cu factorul integrant (7.68) şi ecuaţia devine una cu diferenţială exactă a cărei soluţie generală ştim că este

$$\int_{x_0}^{x} \mu(t)P(t,y_0)dt + \mu(x)\int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.$$

În mod asemănător, dacă se caută un factor integrant $\mu = \mu(y)$ funcţie numai de y, din (7.65) avem

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

şi determinarea lui $\mu = \mu(y)$ este posibilă dacă

$$\frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

este funcţie numai de y. Dacă această condiţie este îndeplinită obţinem pe $\mu = \mu(y)$ printr–o cuadratură

$$\ln \mu(y) = \int \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dy.$$

Este posibil să existe şi alte situaţii în care ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi (7.65), care determină factorul integrant, să se poată rezolva şi să se i se găsească o soluţie particulară.

Exerciţiul 7.2.3 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(x\,\sin y + y\,\cos y)dx + (x\,\cos y - y\,\sin y)dy = 0.$$

Soluţie. Avem:

$$P(x,y) = x\,\sin y + y\,\cos y, \quad Q(x,y) = x\,\cos y - y\,\sin y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\,\cos y + \cos y - y\,\sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) = 1.$$

Aşadar, ecuaţia dată nu este o ecuaţie cu diferenţială totală exactă dar admite factor integrant funcţie numai de x. Factorul integrant se găseşte rezolvând ecuaţia cu variabile separate

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)dx = dx \implies \ln \mu = x \implies \mu(x) = e^x.$$

Înmulţind ecuaţia dată cu factorul e^x, obţinem ecuaţia

$$e^x(x\,\sin y + y\,\cos y)dx + e^x(x\,\cos y - y\,\sin y)dy = 0.$$

Ecuaţia obţinută are forma $P_1(x,y)dx + Q_1(x,y) = 0$, unde

$$P_1(x,y) = e^x(x\,\sin y + y\,\cos y), \quad Q_1(x,y) = e^x(x\,\cos y - y\,\sin y).$$

Efectuând derivatele care se impun, avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial y} = e^x(x\ \cos y + \cos y - y\ \sin y), \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = e^x(x\ \cos y + \cos y - y\ \sin y). \end{cases}$$

Aceste derivate parţiale sunt egale şi, prin urmare, membrul stâng al ecuaţiei diferenţiale obţinută după înmulţirea cu factorul integrant este o diferenţială totală exactă.

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$e^x \int_0^y (x \cos t - t \sin t) dt = C \Longrightarrow e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C$$

şi este reprezentată în forma implicită. ■

Exerciţiul 7.2.4 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$2xy\, dx + (3y^2 - x^2 + 3) dy = 0.$$

Soluţie. Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ecuaţia dată nu este o ecuaţie care provine din anularea unei diferenţiale exactă. În schimb,

$$\frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = -\frac{2}{y},$$

ceea ce arată că ecuaţia diferenţială considerată admite factor integrant care depinde numai de y.

Se găseşte că factorul integrant este $\mu(y) = 1/y^2$.

Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu factorul integrant, obţinem ecuaţia cu diferenţială totală exactă

$$\frac{2\,x}{y}\, dx + \frac{3y^2 - x^2 + 3}{y^2}\, dy = 0,$$

care are soluţia generală

$$\frac{x^2}{y} + 3y - \frac{3}{y} = C.$$

După eliminarea numitorului, din soluţia generală obţinem

$$x^2 + 3y^2 - 3 - Cy = 0,$$

căreia putem să–i spunem integrala generală a ecuaţiei diferenţiale considerate.

Curbele integrale ale acestei ecuaţii diferenţiale constituie o familie de *conice* sau *curbe algebrice de ordinul al doilea.* ■

7.2.4 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Definiţia 7.2.4 *O ecuaţie diferenţială de tipul*

$$P_1(x)Q_2(y)dx + P_2(x)Q_1(y)dy = 0, \tag{7.69}$$

unde $P_1, P_2 \in C^0(I_1)$, $Q_1, Q_2 \in C^0(I_2)$, *se numeşte* **ecuaţie diferenţială cu variabile separabile**.

Observaţia 7.2.1 *Dacă ne limităm numai la subintervalele lui* I_1 *respectiv* I_2 *pe care funcţiile* P_2 *respectiv* Q_2 *nu se anulează, ecuaţia diferenţială cu variabile separabile* (7.69) *se reduce la o ecuaţia diferenţială cu variabile separate*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = 0.$$

Observaţia 7.2.2 *Folosind observaţia precedentă precum şi rezultatele stabiltite la ecuaţii diferenţiale cu variabile separate deducem că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separabile* (7.69) *este*

$$\int_a^x \frac{P_1(t)}{P_2(t)}dt + \int_b^y \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}dt = C, \tag{7.70}$$

unde C *este o constantă arbitrară iar* $a \in I_1,\ P_2(a) \neq 0$ *şi* $b \in I_2,\ Q_2(b) \neq 0.$

Observaţia 7.2.3 *Dacă* x_0 *şi* y_0 *sunt astfel încât*

$$P_2(x_0) = 0, \quad Q_2(y_0) = 0,$$

se constată că $x = x_0$ *şi* $y = y_0$ *sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale cu variabile separabile care nu se pot obţine din soluţia generală* (7.70) *şi ca atare putem spune că*

$$x = x_0 \ \text{ şi } \ y = y_0$$

sunt soluţii singulare ale ecuaţiei (7.69).

Observaţia 7.2.4 *Soluţiile singulare ale unei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile, dacă există, sunt drepte paralele cu axele de coordonate, sau segmente ale acestora.*

Exerciţiul 7.2.5 *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:*

1^0. $(x^2+a^2)(y^2+b^2)\,dx+(x^2-a^2)(y^2-b^2)\,dy=0\,, \quad a>0, b>0;$

2^0. $3\,e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1+e^x)\,\sec^2 y\,dy=0.$

Pentru cea de a doua ecuaţie să se determine acea soluţie cu proprietatea că graficul ei trece prin punctul $(0,\pi/4)$.

Soluţie. **1**^{0}. Considerând că $x\in I$, unde I este un interval inclus în unul din intervalele $(-\infty,-a)$, $(-a,a)$ sau $(a,+\infty)$, constatăm că se pot separa variabilele, pe intervalul I, prin împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei cu $(x^2-a^2)(y^2+b^2)$. Obţinem:

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\,dx+\frac{y^2-b^2}{y^2+b^2}\,dy=0$$

sau

$$\Big(1+\frac{2a^2}{x^2-a^2}\Big)dx+\Big(1-\frac{2b^2}{y^2+b^2}\Big)dy=0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale cu variabile separate este

$$\frac{x+y}{a}+\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big|-\frac{2b}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{b}=C.$$

Dreptele $x=-a$ şi $x=a$, paralele cu axa Oy, sunt soluţii singulare ale ecuaţiei date.

2^0. După separarea variabilelor ecuaţia devine

$$\frac{3e^x}{1+e^x}\,dx+\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg}y}\,dy=0.$$

Separarea variabilelor a fost posibilă pentru $x\in I\!R$ şi $y\in I$, unde intervalul I nu conţine puncte de forma $y=k\pi/2,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

Soluţia generală se obţine integrând primul termen între x_0 şi x, cel de al doilea termen între $y_0 \in I$ şi $y \in I$, adunând rezultatele şi egalându–le apoi cu logaritmul natural al unei constante pozitive arbitrară. Luând $x_0 = 0$, $y_0 = \dfrac{\pi}{4}$ şi efectuând calculele, avem

$$(1 + e^x)^3 \cdot \operatorname{tg} y = 8\,C.$$

Impunând condiţia ca punctul de coordonate $(0, \dfrac{\pi}{4})$ să aparţină unei curbe integrale găsim $C = 1$ şi prin urmare soluţia problemei Cauchy este

$$(1 + e^x)^3 \cdot \operatorname{tg} y = 8.$$

Funcţiile $y = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$, sunt soluţii singulare ale ecuaţiei date; curbele integrale corespunzătoare soluţiilor singulare sunt paralele echidistante la axa Ox. ■

7.2.5 Ecuaţia diferenţială omogenă

Definiţia 7.2.5 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{7.71}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue omogene de acelaşi grad m, se numeşte **ecuaţie diferenţială omogenă**.

Exprimând că funcţiile P şi Q sunt omogene, avem

$$P(tx, ty) = t^m P(x,y)\,, \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x,y)\,. \tag{7.72}$$

Dacă în (7.72) luăm $t = \dfrac{1}{x}$, deducem

$$P(x,y) = x^m P\Big(1, \frac{y}{x}\Big)\,, \quad Q(x,y) = x^m Q\Big(1, \frac{y}{x}\Big)\,. \tag{7.73}$$

Pentru simplificarea formei ecuaţiei diferenţiale (7.71), efectuăm notaţia

$$\frac{P\Big(1, \dfrac{y}{x}\Big)}{Q\Big(1, \dfrac{y}{x}\Big)} = f\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.74}$$

Folosind acum (7.73) şi (7.74) în (7.71) constatăm că ecuaţiile diferenţiale omogene au forma generală

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.75}$$

Teorema 7.2.4 *Schimbarea de funcţie necunoscută*

$$y = z \cdot x \iff \frac{y}{x} = z \tag{7.76}$$

în ecuaţia diferenţială omogenă (7.75) *transformă ecuaţia întro ecuaţie diferenţială cu variabile separabile a cărei integrală generală este*

$$\ln|x| + C = \Phi\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{7.77}$$

unde C este o constantă arbitrară, iar Φ este o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{f(z) - z}$ pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ cu proprietataea că ecuaţia

$$f(z) - z = 0 \tag{7.78}$$

nu are nici o soluţie.

Demonstraţie. Efectuând derivarea în cea de a doua relaţie din (7.76) şi ţinând cont că $z = z(x)$, obţinem

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dz}{dx} + z\,. \tag{7.79}$$

Înlocuind (7.76) şi (7.79) în (7.75), găsim

$$x \cdot \frac{dz}{dx} + z = f(z). \tag{7.80}$$

Pe intervalul I, după separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{7.81}$$

Integrala generală a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.81) este

$$\ln|x| + C = \Phi(z), \tag{7.82}$$

unde am notat prin $\Phi(z)$ o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{f(z) - z}$. Revenind la funcţia y, prin folosirea notaţiei (7.76), din (7.82) obţinem (7.77). ∎

Observaţia 7.2.5 *Dacă* z_0 *este o rădăcină a ecuaţiei* (7.78), *atunci* $z = z_0$ *(constant) este soluţie şi pentru ecuaţia* (7.80), *deoarece* $\dfrac{dz}{dx} = 0$. *De aici şi din* (7.76) *rezultă că funcţia*

$$y = z_0 \cdot x \tag{7.83}$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (7.75), *anume o soluţie singulară. Curba integrală corespunzătoare soluţiei* (7.83) *este o dreaptă care trece prin origine şi are panta* z_0.

Observaţia 7.2.6 *Dacă în* (7.77) *înlocuim pe* C *cu* $-\ln C$, *integrala generală* (7.77) *se scrie*

$$x = C\Psi\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{7.84}$$

unde am notat

$$\Psi\Big(\frac{y}{x}\Big) = e^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{7.85}$$

Observaţia 7.2.7 *O familie de curbe plane de ecuaţie* (7.84) *verifică o ecuaţie diferenţială omogenă.*

Într-adevăr, derivând în ambii membri în (7.84), obţinem

$$1 = C\Big(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\Big)\Psi'\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.86}$$

Eliminând constanta C din ecuaţiile (7.84) şi (7.86), deducem

$$x \cdot \Big(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\Big) = \frac{\Psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)}{\Psi'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)}. \tag{7.87}$$

Rezolvând ecuaţia (7.87) în privinţa lui y', găsim o ecuaţie diferenţială omogenă de forma (7.75), în care membrul al doilea este

$$f\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{\Psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)}{\Psi'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)} + \frac{y}{x}\,. \tag{7.88}$$

Putem spune deci că o ecuaţie diferenţială este omogenă dacă şi numai dacă soluţia sa generală este (7.84). ∎

Exerciţiul 7.2.6 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale omogene:*

$$\mathbf{1}^0.\quad y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}\,;$$

$$\mathbf{2}^0.\quad xyy' = y^2 + 2x^2\,;$$

$$\mathbf{3}^0.\quad xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0\,;$$

$$\mathbf{4}^0.\quad xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}\,;$$

$$\mathbf{5}^0.\quad xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}\,.$$

Soluţie. $\mathbf{1}^0$. După efectuarea schimbării de funcţie (7.76), ecuaţia devine

$$x\,z' + z = z + e^z,$$

care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Separând variabilele, obţinem

$$e^{-z}\,dz = \frac{dx}{x}.$$

Souţia generală a acestei ecuaţii este

$$\ln|x| = -\,e^z + C.$$

Revenind la funcţia iniţială, găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$\ln|x| = -\,e^{\frac{y}{x}} + C.$$

Această ecuaţie diferenţială nu are soluţii singulare.

$\mathbf{2}^0$. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei prin x^2, obţinem

$$\frac{y}{x}\,y' = \Big(\frac{y}{x}\Big)^2 + 2\,. \tag{7.89}$$

După efectuarea schimbării de funcţie (7.76), ecuaţia (7.89) se scrie

$$z(x\,z' + z) = z^2 + 2\,.$$

Separarea variabilelor în această din urmă ecuaţie diferenţială conduce la ecuaţia diferenţială cu variabile separate

$$z\,dz = \frac{2\,dx}{x}\,.$$

Integrând, obţinem

$$z^2 = 4\,\ln C|x|.$$

Revenind la funcţia iniţială deducem că soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y^2 = 4\,x^2\,\ln C|x|.$$

Nici această ecuaţie diferenţială nu are soluţii singulare.

3^0. Avem pe rând:

$$\begin{aligned}
& y' + \cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x} + 1 = 0\,;\\
& x\,z' + z + \cos z - z + 1 = 0\,;\\
& \frac{dz}{1+\cos z} = -\,\frac{dx}{x}\,;\\
& \frac{dz}{2\,\cos^2\dfrac{z}{2}} = -\,\frac{dx}{x}\,;\\
& \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \ln\frac{C}{|x|}\,;\\
& z = 2\,\operatorname{arctg}\ln\frac{C}{|x|}\,.
\end{aligned}$$

Revenind la variabila dependentă iniţială, găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = 2\,x\,\operatorname{arctg}\ln\frac{C}{|x|}.$$

Această ecuaţie are o infinitate de soluţii singulare de forma

$$y = (2k+1)\pi\,x\,,\quad k \in \boldsymbol{Z}$$

deoarece ecuaţia $f(z) - z = 0$, adică ecuaţia $1 + \cos z = 0$, are o infinitate de soluţii şi anume $z = (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

4^0. Procedând în mod analog ca la celelalte trei ecuaţii diferenţiale găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$y\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x\cdot\ln\,(C\cdot\sqrt{x^2+y^2}).$$

Nu are soluţii singulare.

5^0. Urmând prezentarea teoretică, avem:

$$\begin{aligned} y'\ln\frac{y}{x} &= 1+\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}\,; \\ (xz'+z)\ln z &= 1+z\ln z\,; \\ \ln z\,dz &= \frac{dx}{x}\,; \\ z\ln z-z &= \ln C|x| \end{aligned}$$

după care, reîntorcându–ne la funcţia y, găsim că soluţia generală este

$$y\,\ln\Big|\frac{y}{x}\Big|=y+x\ln C|x|.$$

Nu are soluţii singulare. ■

7.2.6 Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene

O ecuaţie diferenţială reductibilă la una omogenă este

$$y'=f\Big(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\Big), \tag{7.90}$$

unde $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ sunt constante reale care satisfac condiţia

$$a_1\,b_2-a_2\,b_1\,\neq\,0,$$

iar f este o funcţie reală de variabilă reală definită pe un interval. Ea este evident o ecuaţie diferenţială omogenă deoarece se poate scrie în forma

$$y'=f\Big(\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}\Big).$$

Cu substituţia

$$y = xz \iff z = \frac{y}{x} \tag{7.91}$$

se separă variabilele.

Exerciţiul 7.2.7 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0. \tag{7.92}$$

Soluţie. Dacă punctul $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ este astfel încât nu este verificată ecuaţia

$$x - 2y = 0, \tag{7.93}$$

(7.92) se scrie în forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}. \tag{7.94}$$

Facând schimbarea de funcţie $y = xz$, constatăm că (7.94), care este o ecuaţie de forma (7.90), devine:

$$xz' + z = \frac{z - 2}{2z - 1}.$$

Separând variabilele, obţinem:

$$-\frac{2z - 1}{2(z^2 - z + 1)}dz = \frac{dx}{x}.$$

Integrând această ecuaţie, se găseşte:

$$x^2(z^2 - z + 1) = C^2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$x^2 - xy + y^2 = C^2$$

şi, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de elipse cu centrul de simetrie în originea axelor din care se scot punctele de intersecţie cu dreapta (7.93). ■

O altă ecuaţie diferenţială reductibilă la o ecuaţie omogenă este

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big), \tag{7.95}$$

unde $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ sunt constante care satisfac condiţiile:

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0\,; \quad a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \,\neq\, 0. \tag{7.96}$$

În situaţia (7.96) mulţimile (D_1) şi (D_2) ale punctelor de coordonate (x, y) care satisfac respectiv ecuaţiile:

$$(D_1): \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0; \quad (D_2): \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

reprezintă două drepte concurente în punctul (x_0, y_0).

Efectuând schimbarea de variabilă independentă şi de funcţie (o translaţie)

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \end{cases}$$

în ecuaţia (7.95), constatăm că aceasta devine

$$\frac{dv}{du} = f\Big(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\Big). \tag{7.97}$$

Ecuaţia (7.97) este de tipul (7.90), deci cu schimbarea de funcţie

$$v = uz$$

se separă variabilele.

Exerciţiul 7.2.8 *Să se arate că prin schimbări de funcţie şi de variabilă convenabile, următoarele ecuaţii se reduc la ecuaţii diferenţiale de tip omogen şi apoi să se integreze:*

$$\begin{array}{llcll} \textbf{a}) & (2x + y + 1)dx & + & (x + 2y - 1)dy & = & 0\,; \\ \textbf{b}) & (2x + y - 1)dx & + & (x - 2y + 3)dy & = & 0\,; \\ \textbf{c}) & (x + y - 2)dx & + & (x - y + 4)dy & = & 0. \end{array}$$

Soluţie. Determinând raportul dy/dx constatăm că fiecare din cele trei ecuaţii aparţine tipului de ecuaţie diferenţială (7.95) prezentat mai sus.

a) Dreptele $(D_1): \ 2x + y + 1 = 0$ şi $(D_2): \ x + 2y - 1 = 0$ se intersectează în punctul $(-1, 1)$. Efectuând schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$\begin{cases} x = u - 1, \\ y = v + 1, \end{cases}$$

ecuaţia dată se transformă în:

$$(2u+v)du+(u+2v)dv=0.$$

În ecuaţia omogenă obţinută punem $v = uw,\ w = w(u)$, de unde $dv = u\,dw + w\,du$ şi ajungem la ecuaţia cu variabile separabile

$$2(w^2+w+1)u\,du+u^2(1+2w)\,dw=0,$$

a cărei integrală generală este

$$u\sqrt{w^2+w+1}=C,$$

sau, după revenirea la funcţia v prin înlocuirea lui w cu v/u şi ridicarea la pătrat,

$$u^2+uv+v^2=C^2\,.$$

Trecând la variabilele iniţiale prin $u = x+1$ şi $v = y-1$, după transformări elementare găsim că integrala generală a ecuaţiei date este familia de curbe algebrice de ordinul al doilea de gen eliptic cu centru în punctul de intersecţie al celor drepte

$$x^2+xy+y^2+x-y=C_1,$$

unde noua constantă C_1 este $C_1 = C^2 - 1$.

b) Punctul de concurenţă al celor două drepte aici este $(-1/5, 7/5)$. Efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x=u-1/5,\\ y=v+7/5, \end{cases}$$

ecuaţia devine

$$(2u+v)\,du+(u-2v)\,dv=0. \tag{7.98}$$

Această ecuaţie este omogenă, drept pentru care facem schimbarea de funcţie

$$v=u\,w,\quad w=w(u)$$

şi ajungem la ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

$$u\,w'=\frac{2(1+w-w^2)}{2w-1}$$

a cărei soluţie generală este

$$2|w^2 - w - 1| = C^2.$$

Revenind la funcţia v, obţinem

$$2 - uv - u^2 = \pm C\,.$$

Înlocuind în acest ultim rezultat pe u cu $x + 1/5$ şi pe v cu $y - 7/5$, după calcule elementare, găsim că soluţia generală a ecuaţiei considerate la acest punct este

$$x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C_1.$$

Folosind teoria curbelor algebrice de ordinul al doilea se constată că această familie de curbe plane este formată fie din hiperbole, fie din perechi de drepte concurente reale, caz în care vom spune ca aceste curbe integrale sunt curbe algebrice de ordinul al doilea (conice) de gen hiperbolic.

c) Se procedează în mod asemănător ca la celelalte două ecuaţii diferenţiale şi se găseşte că soluţia generală este

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$$

care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de curbe algebrice de ordinul al doilea de gen hiperbolic. ■

Cel de al treilea tip de ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene este acela de forma (7.95), în care constantele care apar la variabila funcţiei f satisfac relaţiile

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \tag{7.99}$$

În acest caz dreptele (D_1) şi (D_2) din (7.96) sunt paralele. Din (7.99) rezultă

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k,$$

deci ecuaţia (7.95) devine

$$y' = f\Big(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{k(a_1 x + b_1 y) + c_2}\Big). \tag{7.100}$$

Cu schimbarea de funcţie dată de relaţia

$$a_1 x + b_1 y = z, \quad z = z(x),$$

care implică

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\Big(\frac{dz}{dx} - a_1\Big)$$

ecuaţia (7.100) capătă forma

$$\frac{1}{b_1}\Big(\frac{dz}{dx} - a_1\Big) = f\Big(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\Big). \tag{7.101}$$

Ecuaţia diferenţială (7.101) este cu variabile separabile. Efectuând separarea variabilelor, găsim că pe intervalul real J, unde ecuaţia

$$b_1\, f\Big(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\Big) + a = 0$$

nu are nici o soluţie, (7.101) se transformă în

$$\frac{dz}{b_1 f\Big(\dfrac{z + c_1}{kz + c_2}\Big) + a} = dx\,. \tag{7.102}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (7.102) este

$$x + C = \Phi(z),$$

unde funcţia Φ este o primitivă pe J a funcţiei

$$\frac{1}{b_1 f\Big(\dfrac{z + c_1}{kz + c_2}\Big) + a}.$$

Revenind la variabilele iniţiale, integrala generală a ecuaţiei (7.100) este

$$x + C = \Phi(a_1 x + b_1 y).$$

Exerciţiul 7.2.9 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(x - 2y + 9)\, dx - (3x - 6y + 19)\, dy = 0.$$

Soluţie. Dreptele $(D_1):\ x - 2y + 9 = 0$ şi $(D_2):\ 3x - 6y + 19 = 0$ sunt paralele. În acest caz facem schimbarea de funcţie

$$x - 2y = z \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}.$$

Ecuaţia dată devine

$$z + 9 - (3z + 19)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\Big) = 0.$$

Aceasta din urmă este o ecuaţie cu variabile separabile care, după separarea lor în cazul $z + 1 \neq 0$, devine

$$\frac{3z + 19}{z + 1}\, dz = dx.$$

Integrala generală este dată de

$$8 \ln|x - 2y + 1| + x - 3y = C.$$

Egalitatea $z + 1 = 0$ ne dă soluţia $x - 2y + 1 = 0$, care verifică ecuaţia dată iniţial. Această ultimă soluţie se obţine din integrala generală pentru $C \to -\infty$. ∎

7.2.7 Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi

Definiţia 7.2.6 *O ecuaţie diferenţială de forma*

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{7.103}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi, neomogenă**.

Definiţia 7.2.7 *Ecuaţia diferenţială*

$$y' + P(x)y = 0 \tag{7.104}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întai, omogenă**.

Observaţia 7.2.8 *Cuvântul* **omogenă** *are aici altă semnificaţie decât cea întâlnită în unul din paragrafele anterioare. Aici, cuvântul omogenă semnifică faptul că membrul doi din* (7.103) *este nul. Dacă în* (7.104) *funcţia P este aceeaşi ca cea din* (7.103), *atunci* (7.104) *este numită ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi* **asociată** *ecuaţiei* (7.103).

Teorema 7.2.5 *Soluţia generală a ecuaţiei* (7.103) *este dată de*

$$y = e^{-\int P(x)dx}\Big[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\Big], \quad x \in I. \tag{7.105}$$

Demonstraţie. Presupunem că ecuaţia diferenţială (7.103) are soluţii pe intervalul I şi fie $y = y(x),\ x \in I$, o soluţie arbitrară a acesteia. Atunci, avem

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x),\ (\forall)\, x \in I. \tag{7.106}$$

Înmulţind ambii membri ai identităţii (7.106) cu $e^{\int P(x)dx},\ x \in I$, aceasta devine

$$\frac{d}{dx}\Big(y(x)e^{\int P(x)dx}\Big) = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad x \in I. \tag{7.107}$$

Integrând în ambii membri ai lui (7.107), obţinem

$$y(x)e^{\int P(x)dx} = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{7.108}$$

Prin înmulţirea în ambii membri ai lui (7.108) cu factorul $e^{-\int P(x)dx}$, se obţine că soluţia

$$y = y(x), \quad x \in I, \tag{7.109}$$

a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi, neomogenă, are forma (7.105).

Reciproc, să considerăm o funcţie de forma (7.105), în care C este o constantă arbitrară. Derivata acestei funcţii este

$$\begin{aligned} y'(x) \ = \ & -P(x)e^{-\int P(x)dx}\Big(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\Big) + \\ & + e^{-\int P(x)dx}Q(x)e^{\int P(x)dx}. \end{aligned} \tag{7.110}$$

Având în vedere că cel de-al doilea factor al primului termen din membrul doi al relaţiei (7.110) este tocmai funcţia $y = y(x)$ din (7.105), deducem că (7.110) se scrie în forma

$$y'(x) = -\,P(x)\,y(x) + e^{-\int P(x)dx}Q(x)\,e^{\int P(x)dx}. \tag{7.111}$$

Cum cel de al doilea termen din membrul al doilea al relaţiei (7.111) este $Q(x)$, rezultă că această relaţie se scrie în forma

$$y'(x) = -\,P(x)\,y(x) + Q(x). \tag{7.112}$$

Egalitatea (7.112) exprimă faptul că funcţia $y = y(x)$ din (7.105) este o soluţie a ecuaţiei (7.103). ■

Teorema 7.2.6 *Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi omogenă, de forma* (7.104), *are soluţia generală*

$$y = C\, e^{-\int P(x)dx}, \tag{7.113}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Demonstraţie. Ecuaţia (7.104) este cu variabile separabile. Separând variabilele obţinem

$$\frac{dy}{y} = -\,P(x)dx. \tag{7.114}$$

Integrând în ambii membri ai lui (7.114) se găseşte (7.113). ■

Teorema 7.2.7 *Fie $x_0 \in I$, arbitrar dar fixat şi $y_0 \in I\!R$, oarecare. Soluţia problemei Cauchy*

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{7.115}$$

este

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}dt\Big), \quad x \in I. \tag{7.116}$$

Demonstraţie. În ipoteza că soluţia problemei Cauchy (7.115) există, fie aceasta de forma (7.109), în care variabila independentă se va nota cu t. Înmulţind ambii membri ai lui (7.103) cu $e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}$, se obţine

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}\Big) = Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}, \quad x \in I. \tag{7.117}$$

Integrarea lui (7.117) între limitele x_0 şi x, urmată de înmulţirea ambilor membri cu $e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$, conduce la afirmaţia că soluţia problemei Cauchy (7.115) este (7.116).

Reciproc, funcţia (7.116) are proprietatea a doua din (7.115). Prin calcul direct se constată că această funcţie satisface prima ecuaţie din (7.115). ■

Observaţia 7.2.9 *Soluţia generală* (7.105) *a ecuaţiei diferenţiale liniară de ordinul întâi, neomogenă,* (7.103), *se scrie*

$$y = C\, e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \quad x \in I. \tag{7.118}$$

Scrisă astfel, se vede că este egală cu suma dintre integrala generală y_o *a ecuaţiei omogene asociate* (7.104) *şi funcţia*

$$y_p : I \to I\!\!R, \quad y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx,$$

care este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (7.103) *deoarece se obţine din* (7.105) *dând constantei arbitrare* C *valoarea zero. Aşadar,*

$$y = y_o + y_p.$$

Teorema 7.2.8 *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi este o funcţie de forma*

$$y = \varphi(x) + C\psi(x), \quad x \in I. \tag{7.119}$$

Reciproc, orice familie de curbe plane care depinde liniar de o constantă arbitrară verifică o ecuaţie liniară de ordinul întı.

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din (7.118).

Pentru a demonstra reciproca, să observăm mai întâi că

$$y' = \varphi'(x) + C\psi'(x), \quad x \in I. \tag{7.120}$$

Eliminând constanta C între (7.119) şi (7.120), obţinem ecuaţia

$$\frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)}, \tag{7.121}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi. ■

Teorema 7.2.9 *Dacă* y_1 *este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare* (7.103), *soluţia sa generală se obţine printr–o cuadratură.*

Demonstraţie. Efectuăm schimbarea de funcţie $y = z + y_1$ şi obţinem

$$z' + y_1' + P(x)z + P(x)y_1 - Q(x) = 0. \tag{7.122}$$

Deoarece y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei (7.103), avem

$$y_1' + P(x)y_1 - Q(x) = 0. \tag{7.123}$$

Folosind (7.123) în (7.122) găsim că z este soluţia ecuaţiei liniare omogene (7.104) care se obţine doar printr–o operaţie de integrare şi anume

$$z = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Din cele de mai sus rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (7.103) este

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)dx}$$

şi pentru determinarea ei s–a eefectuat doar o operaţie de integrare sau, cum se mai spune, o cuadratură. ■

Corolarul 7.2.2 *Dacă y_1 şi y_2 sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei* (7.103), *soluţia generală a sa este dată de*

$$y = y_2 + A(y_1 - y_2) \quad (A = \text{ constantă arbitrară }). \tag{7.124}$$

Demonstraţie. Fie soluţia generală a ecuaţiei (7.103) scrisă în forma (7.119) şi $y_1,\ y_2,\ y_3$, trei soluţii particulare corespunzătoare la trei valori $C_1,\ C_2,\ C_3$, ale constantei arbitrare C

$$y_1 = \varphi(x) + C_1\psi(x), \quad y_2 = \varphi(x) + C_2\psi(x), \quad y_3 = \varphi(x) + C_3\psi(x). \tag{7.125}$$

Eliminând funcţiile φ şi ψ din relaţiile (7.125), obţinem relaţia

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{C_3 - C_2}{C_1 - C_2} = A \quad \text{(constant)}. \tag{7.126}$$

Dacă considerăm că cea de a treia soluţie y_3 este soluţia generală, din relaţia (7.126) se obţine (7.124). ■

Observaţia 7.2.10 *Dacă se cunosc două soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi, neomogenă, soluţia generală a sa se obţine fără nici o cuadratură.*

Observaţia 7.2.11 *Fie $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ două curbe integrale date pe intervalul $[a, b]$ şi M_1, M_1', M_2, M_2', intersecţiile lor cu două paralele la axa Oy. Putem construi prin puncte orice altă curbă integrală Γ, definită pe $[a, b]$, deoarece, în baza*

egalităţii (7.126), *punctele* M, M' *de intersecţie ale curbei* Γ *cu cele două drepte verifică relaţia*

$$\frac{MM_2}{M_1M_2} = \frac{M'M_2}{M_1'M_2},$$

relaţie care arată că dreptele M_1M_1', M_2M_2' *şi* MM' *sunt concurente. Luând punctul* $M(a, y_0)$ *fix, ceea ce înseamnă a rezolva problema Cauchy* (7.115), *unde în loc de* x_0 *este* a, *prin procedeul descris mai sus obţinem curba integrală ce trece prin acest punct.*

Exerciţiul 7.2.10 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul întâi*

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}^0) & y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x; & \\ \mathbf{2}^0) & tx' = 2x + t^3\cos t, & x(\pi/2) = \pi^2/4; \\ \mathbf{3}^0) & y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}\,x; & \\ \mathbf{4}^0) & y' + 3y\,\mathrm{tg}\,3x = \sin 6x, & y(0) = 1/3; \\ \mathbf{5}^0) & (\sin x + t\,\mathrm{ctg}\,x)x' = 1, & t(\pi/2) = 1; \\ \mathbf{6}^0) & (2e^y - x)y' = 1, & y(0) = -1, \end{array}$$

iar unde se specifică, să se rezolve problema Cauchy cu data iniţială menţionată alăturat.

Soluţie. Ecuaţiile diferenţiale $\mathbf{1}^0)-\mathbf{4}^0)$ sunt liniare şi neomogene, iar soluţiile lor generale se determină utilizând formula (7.105). Avem:

$\mathbf{1}^0)$ Funcţiile P şi Q din această ecuaţie sunt definite pe un interval I_k inclus în intervalul $(-\pi/2 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi)$ şi au valorile date de

$$P(x) = \mathrm{tg}\,x, \quad Q(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in I_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx}\Big(C + \int \frac{1}{\cos x} e^{\int \mathrm{tg}\,x dx} dx\Big), \quad x \in I_k.$$

Prin urmare, soluţia generală este dată de

$$y = \sin x + C\cos x, \quad C \in I\!\!R, \quad x \in I_k.$$

2^0) Să observăm că variabila independentă a acestei ecuaţii diferenţiale este t, iar funcţia necunoscută este $x = x(t)$. Intervalul pe care sunt definite funcţiile P şi Q este inclus sau în intervalul $(-\infty, 0)$ sau în $(0, +\infty)$. Pentru că se cere rezolvarea ulterioară a unei probleme Cauchy în care $t_0 = \pi/2 \in (0, +\infty)$, vom considera de la început că $I = (0, +\infty)$. Avem

$$P(t) = -\frac{2}{t}, \quad Q(t) = t^2 \cos t, \quad t \in (0, +\infty).$$

Soluţia generală este

$$x = e^{2\int \frac{dt}{t}}\Big(C + \int t^2 \cos t e^{-2\int \frac{dt}{t}}\Big), \quad t \in (0, +\infty).$$

După efectuarea cuadraturilor, se găseşte

$$x = t^2(C + \sin t), \quad t \in (0, +\infty), \quad C \in I\!R.$$

Impunând ca să fie satisfăcută condiţia iniţială $x(\pi/2) = \pi^2/4$, se ajunge la concluzia că $C = 0$ şi prin urmare soluţia problemei Cauchy este $x = t^2 \sin t$.

3^0) Integrăm această ecuaţie liniară utilizând Observaţia 7.2.9. Aici, funcţiile P şi Q sunt definite pe un interval $I \subset I\!R$ în care ecuaţia $\cos x = 0$ nu are soluţii, valorile lor fiind date de

$$P(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad Q(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad x \in I.$$

Trebuie să integrăm întâi ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei considerate

$$y' + \frac{1}{\cos^2 x} y = 0.$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile şi are soluţia generală

$$y_o = Ce^{-\operatorname{tg} x}, \quad x \in I.$$

Vom arăta cum se poate determina o soluţie particulară din soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate folosind *metoda variaţiei constantei de integrare C*, denumită şi *metoda lui Lagrange*.

Se caută o soluţie particulară în forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}, \quad x \in I.$$

Punând condiţia ca y_p să verifice ecuaţia iniţială, obţinem:

$$C'(x)\cos^2 x e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in I,$$

de unde

$$C(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = (\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x}.$$

Prin urmare, soluţia particulară este

$$y_p(x) = \operatorname{tg} x - 1, \quad x \in I.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$y = y_o + y_p = Ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1, \quad x \in I.$$

4^0) Avem $P(x) = 3\operatorname{tg} 3x,\ Q(x) = \sin 6x$ şi le vom considera definite pe un interval $I \in I\!R$ care conţine originea.

Soluţia generală este

$$y = e^{-3\int \operatorname{tg} 3x dx}\Big(C + \int \sin 6x e^{3\int \operatorname{tg} 3x dx} dx\Big), \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = e^{\ln\cos 3x}\Big(C + \int \sin 6x e^{-\ln\cos 3x} dx\Big) = \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ = \cos 3x\Big(C + \int \frac{\sin 6x}{\cos 3x} dx\Big) \Longrightarrow y = \cos 3x\Big(C - \frac{2}{3}\cos 3x\Big).$$

Impunând condiţia ca în $x_0 = 0$ valoarea funcţiei y de mai sus să fie $1/3$ găsim $C = 1$ şi deci soluţia problemei Cauchy este

$$y = \cos 3x\Big(1 - \frac{2}{3}\cos 3x\Big), \quad x \in I.$$

5^0) Ecuaţia este neliniară în funcţia $x = x(t)$. Ea este însă liniară în t căci se poate scrie

$$\frac{dt}{dx} - t\operatorname{ctg} x = \sin x.$$

Aceasta din urmă are soluţia generală

$$t = (C + x)\sin x, \quad x \in I_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \quad I_k \subset (k\pi, (k+1)\pi).$$

Pentru ecuaţia iniţială, soluţia generală este funcţia $x = \varphi(t, C)$ definită implicit de ecuaţia

$$(C + x)\sin x \,-\, t \,=\, 0, \quad (t, x) \in I\!R \times I_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \quad I_k \subset (k\pi, (k+1)\pi).$$

Încercând rezolvarea problemei Cauchy considerate, se găseşte $C = 0$.

Deci, soluţia problemei Cauchy este funcţia $x = x(t)$ definită implicit de ecuaţia

$$t - x\sin x = 0, \tag{7.127}$$

întro vecinătate a punctului $t = \pi/2$.

6^0) Ecuaţia este liniară în x. Procedând ca la exerciţiul precedent găsim că această ecuaţie diferenţială admite integrala generală

$$x - e^y - Ce^{-y} = 0.$$

Soluţia problemei Cauchy se determină din integrala generală luând $C = -1$. Avem

$$x = e^y - e^{-y} \Longrightarrow \text{sh} y = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = \text{argsh}\,\frac{x}{2},$$

unde argsh$(\cdot)$ este funcţia inversă a funcţiei sh$(\cdot)$. ∎

7.2.8 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi reductibile la ecuaţii liniare

Ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli

Definiţia 7.2.8 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in I\!R \setminus \{0, 1\}, \quad P,\ Q \in C^0(I), \quad I \subset I\!R, \tag{7.128}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli**.

Teorema 7.2.10 *Cu schimbarea de funcţie*

$$y^{1-\alpha} = z, \tag{7.129}$$

ecuaţia Bernoulli (7.128) *se transformă întro ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă.*

Demonstraţie. Dacă împărţim cu y^α în (7.128) avem

$$\frac{y'}{y^\alpha} + P(x)\, y^{1-\alpha} = Q(x). \tag{7.130}$$

Folosind (7.129) şi consecinţa acesteia

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, z'$$

în (7.130), ecuaţia (7.128) se transformă în

$$z' + (1-\alpha)\, P(x)\, z = (1-\alpha)\, Q(x), \tag{7.131}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă. ■

Corolarul 7.2.3 *Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli* (7.128) *este*

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{7.132}$$

unde funcţia $z = z(x, C)$ este dată de

$$z = e^{-(1-\alpha)\int P(x)dx}\Big[C + (1-\alpha)\int Q(x)\, e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}\Big]. \tag{7.133}$$

Demonstraţie. Ecuaţia diferenţială (7.131), fiind liniară, de ordinul întâi şi neomogenă, are soluţia generală (7.133). După determinarea funcţiei z, funcţia y, soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli, se găseşte din (7.129), fiind astfel conduşi la (7.132). ■

Exerciţiul 7.2.11 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:*

a) $\quad y' + \dfrac{1}{x}\, y = x^2\, y^4;$

b) $\quad y' + \dfrac{1}{x}\, y = \dfrac{1}{x^2}\, y^{-2};$

c) $\quad y' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = 4\, \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, \sqrt{y}.$

Soluţie. Toate ecuaţiile diferenţiale de mai sus sunt de tip Bernoulli.

a) Constanta α are valoarea 4 şi ecuaţia este echivalentă cu

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{x}\,y^{-3} = x^2.$$

Facem schimbarea de funcţie

$$z = y^{-3} \implies \frac{y'}{y^4} = -\,\frac{1}{3}\,z' \tag{7.134}$$

şi ecuaţia iniţială devine

$$z' - \frac{3}{x}\,z = -\,3\,x^2,$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă. Cu menţiunea că punând $\ln C$ în loc de C, soluţia generală a acestei ecuaţii liniare este

$$z = e^{3\int\frac{dx}{x}}\Big(\ln C - 3\int x^2\,e^{-3\int\frac{1}{x}dx}dx\Big) \implies z = |x|^3\,\ln\frac{C}{|x|^3}.$$

Soluţia ecuaţiei Bernoulli este

$$z = \frac{1}{|x|\sqrt[3]{\ln\dfrac{C}{|x|^3}}}.$$

b) Schimbarea de funcţie $z = y^3$ conduce la ecuaţia liniară

$$z' + \frac{3}{x}\,z = \frac{3}{x^2}$$

cu soluţia generală

$$z = \frac{C}{|x|^3} + \frac{3}{2|x|}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = \frac{1}{|x|}\sqrt[3]{\frac{3x^2 + 2C}{2}}.$$

c) Procedând în mod asemănător ca la celelalte două exemple, găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = (1 + x^2)(\mathrm{arctg}\,^2 x + C)^2.$$

■

Ecuaţia diferenţială de tip Riccati

Definiţia 7.2.9 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$y' = P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x), \quad P, Q, R \in C^0(I), \quad I \subset I\!R \tag{7.135}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Riccati**.

În general ecuaţia Riccati nu poate fi integrată prin cuadraturi. Avem însă

Teorema 7.2.11 *Dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_1 a ecuaţiei Riccati, prin schimbarea de funcţie*

$$y = y_1 + \frac{1}{z}, \tag{7.136}$$

ecuaţia se transformă întro ecuaţie liniară.

Demonstraţie. Fie y o soluţie a ecuaţiei (7.135) şi z o funcţie legată de y prin relaţia (7.136). Atunci, derivatele acestor funcţii sunt în relaţia

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}. \tag{7.137}$$

Înlocuind (7.136) şi (7.137) în (7.135), obţinem

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\Big(y_1 + \frac{1}{z}\Big)^2 + Q(x)\Big(y_1 + \frac{1}{z}\Big) + R(x). \tag{7.138}$$

După efectuarea operaţiilor indicate şi luarea în calcul a faptului că y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati, din (7.138) obţinem

$$z' + \Big(2y_1 P(x) + Q(x)\Big) z = -\, P(x), \tag{7.139}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă. ■

Teorema 7.2.12 *Dacă y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati şi z este o soluţie a ecuaţiei liniare* (7.139), *funcţia y definită de* (7.136) *este o soluţie a ecuaţiei* (7.135).

Demonstraţie. Din (7.136) avem

$$z = \frac{1}{y - y_1}, \implies z' = \frac{y' - y_1'}{(y - y_1)^2}. \tag{7.140}$$

Înlocuind relaţiile din (7.140) în (7.139) şi ţinând cont de faptul că y_1 este soluţie particulară a ecuaţiei Riccati deducem că y este soluţie a ecuaţiei (7.135). ∎

Observaţia 7.2.12 *Integrala generală a unei ecuaţii Riccati este funcţie omografică de constanta arbitrară.*

Într-adevăr, z fiind soluţia unei ecuaţii liniare, ea este funcţie liniară de o constantă arbitrară C

$$z = \varphi(x) + C\,\psi(x),$$

deci,

$$y = y_1 + \frac{1}{\varphi(x) + C\,\psi(x)} = \frac{y_1\varphi(x) + 1 + C\,y_1\,\psi(x)}{\varphi(x) + C\,\psi(x)},$$

de unde rezultă că y este de forma

$$y = \frac{\varphi_1(x) + C\,\psi_1(x)}{\varphi(x) + C\,\psi(x)},$$

care este o transformare omografică de constanta arbitrară C.

Reciproc, o familie de curbe plane care depinde omografic de o constantă arbitrară verifică o ecuaţie de tip Riccati. ∎

Observaţia 7.2.13 *Dacă y_1, y_2, y_3, y_4 sunt patru soluţii particulare corespunzătoare la patru valori arbitrare C_1, C_2, C_3, C_4 ale constantei arbitrare C, atunci are loc relaţia*

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2} : \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} = A \quad \textit{(constant).}$$

Membrul întâi al ultimei relaţii se numeşte *raport anarmonic al funcţiilor y_1, y_2, y_3 şi y_4*. Proprietatea are loc datorită faptului că o transformare omografică păstrează raportul anarmonic. ∎

Observaţia 7.2.14 *Dacă se cunosc trei soluţii particulare* y_1, y_2, y_3 *ale unei ecuaţii Riccati, din relaţia scrisă la observaţia precedentă, soluţia generală rezultă din*

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

fără a efectua nici o cuadratură.

Exerciţiul 7.2.12 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de tip Riccati de mai jos ştiind că admit soluţiile particulare indicate alăturat:*

$$\mathbf{1}^0. \qquad y' = -\,2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}, \qquad y_1 = \frac{1}{x};$$

$$\mathbf{2}^0. \qquad y' = -\,\frac{1}{x}\,y^2 + \frac{4}{x}\,y + \frac{3}{x}, \qquad y_1 = 1.$$

Soluţie. $\mathbf{1}^0$. Facem schimbarea de funcţie

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \quad y' = -\,\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}.$$

Folosind aceste rezultate în ecuaţie, găsim că funcţia z satisface ecuaţia liniară

$$z' - 3z = 2x.$$

Aflăm mai întâi soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate ecuaţiei liniare de mai sus, adică a ecuaţiei cu variabile separabile

$$z' - 3z = 0.$$

Soluţia generală a ultimei ecuaţiei este

$$z_o = C\,e^{3x}.$$

Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei liniare neomogene utilizăm metoda lui Lagrange, luând deci pe z_p în forma

$$z_p(x) = C(x)e^{3x}.$$

Funcţia necunoscută $C(x)$ se va determina din condiţia ca z_p să satisfacă ecuaţia

$$z_p'(x) - 3\,z_p(x) = 2\,x.$$

Se găseşte că derivata funcţiei $C(x)$ este

$$C'(x) = 2\,x\,e^{3x}.$$

Integrând ultima ecuaţie cu variabile separate, găsim

$$C(x) = -\,\frac{2(3x+1)}{9}\,e^{3x}.$$

Rezultă aşadar că soluţia particulară căutată este

$$z_p = -\,\frac{2(3x+1)}{9}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare în z este $z = z_o + z_p$. Înlocuind rezultatele determinate deducem în cele din urmă că

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{C\,e^{3x} - \dfrac{2(3x+1)}{9}}$$

este soluţia generală a ecuaţiei date.

2^0. Facem substituţia

$$y = 1 + \frac{1}{z} \implies y' = -\frac{z'}{z^2}$$

şi ecuaţia se transformă în

$$-\,\frac{z'}{z^2} = -\,\frac{1}{x}\,(1+\frac{1}{z})^2\, +\, \frac{4}{x}\,(1+\frac{1}{z}) - \frac{3}{x}$$

sau

$$z' + \frac{2}{x}\,z = \frac{1}{x}$$

cu soluţia generală

$$z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\Big(C + \int \frac{1}{x}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\Big) = 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este deci

$$y = 1 + \frac{2x^2}{2C + x^2}, \quad x \in I\!R.$$

Dacă, de exemplu, se doreşte determinarea acelei curbe integrale care să treacă prin punctul $(1, 2)$, avem

$$2 = 1 + \frac{2}{2C+1} \implies C = \frac{1}{2}$$

şi ca urmare soluţia căutată este $y = 1 + \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $x \in I\!R$. ■

Exemplul 7.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială Riccati*

$$y' = \frac{1}{1+x^3}\, y^2 + \frac{x^2}{1+x^3}\, y + \frac{2\,x}{1+x^3}$$

ştiind că are soluţiile particulare

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x - 1, \quad y_3 = -\,\frac{1}{x}$$

SoluţiConform ultimei observaţii, soluţia generală este dată de

$$\frac{y - x^3}{y - x + 1} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} = C \;\text{ sau }\; y = \frac{C(1 - x^2) + x^2}{1 - C(x+1)},$$

de unde vedem că soluţia generală este transformare omografică de constanta arbitrară C. ■

7.3 Ecuaţii diferenţiale algebrice în y'.

Fie ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi

$$A_0(x,y)(y')^n + A_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x,y)y' + A_n(x,y) = 0, \quad (7.141)$$

care provine din anularea unui polinom în y' cu coeficienţii $A_k(x,y)$ funcţii continue de x şi y întrun domeniu $D \subset I\!R^2$ şi cu $A_0(x,y) \neq 0$ în D.

Considerată ca o ecuaţie în y', ecuaţia dată are n rădăcini de forma

$$f_k(x,y), \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

care sunt funcţii de x şi y. Fiecărei rădăcini reale îi corespunde ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi

$$y' = f(x,y). \quad (7.142)$$

O soluţie a ecuaţiei (7.142) este soluţie a ecuaţiei (7.141).

Exemplul 7.3.1 *Să se afle soluţiile ecuaţiei diferenţiale*

$$y\,y'^2 - (1+2xy)y' + 2x = 0.$$

SoluţiEcuaţia diferenţială dată este o ecuaţie algebrică de gradul doi în variabila y'. Rezolvată în raport cu y' ne dă următoarele două ecuaţii:

$$y' = \frac{1}{y}; \quad y' = 2\,x,$$

care au respectiv soluţiile:

$$y^2 = 2\,x + C_1; \quad y = x^2 + C_2,$$

în care C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare. ■

7.4 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, nerezolvate în raport cu y', integrabile prin metode elementare

7.4.1 Ecuaţia diferenţială de forma $y = f(y')$

Teorema 7.4.1 *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale*

$$y = f(y') \tag{7.143}$$

este dată de

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{1}{p} f'(p)\,dp + C, \\ y = f(p). \end{cases} \tag{7.144}$$

Demonstraţie. Să punem

$$y' = p \tag{7.145}$$

şi să luăm p drept variabilă independentă. Avem:

$$y = f(p) \implies dy = f'(p)\,dp; \tag{7.146}$$

$$\frac{dy}{dx} = p, \implies dx = \frac{1}{p}\,dy. \tag{7.147}$$

Din (7.146) şi (7.147) deducem

$$dx = \frac{1}{p}\, f'(p)\, dp, \tag{7.148}$$

de unde printr–o cuadratură se obţine prima din relaţiile (7.144). Cea de a doua relaţie din (7.144) rezultă din (7.143) şi (7.145).

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este dată parametric prin relaţiile (7.144) şi, din punct de vedere geometric, reprezintă o famile uniparametrică de curbe plane. ■

Exerciţiul 7.4.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y = y'^2 + \ln y', \quad y' > 0.$$

Soluţie. Punem $y' = p$ şi ecuaţia devine

$$y = p^2 + \ln p \implies dy = \Big(2\,p + \frac{1}{p}\Big)dp.$$

Avem apoi

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dx = \frac{1}{p}\,dy \implies dx \;=\; \frac{1}{p}\Big(2\,p + \frac{1}{p}\Big)dp.$$

Integrând ultima egalitate, în care considerăm că $p > 0$, obţinem

$$x = \int \Big(2 + \frac{1}{p^2}\Big)dp = 2p - \frac{1}{p} + C.$$

Din cele deduse constatăm că soluţia generală este

$$\begin{cases} x \;=\; 2p - \dfrac{1}{p} + C, \\ y \;=\; p^2 + \ln p, \quad p > 0. \end{cases}$$

Prin urmare, prin această metodă soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date se exprimă parametric. ■

7.4.2 Ecuaţia diferenţială de tipul $F(y, y') = 0$

Integrarea acestui tip de ecuaţie diferenţială se face cu o cuadratură dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$. Să presupunem că o asemenea reprezenatre este

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \quad t \in [a, b] \subset I\!R, \end{cases}$$

în care funcţiile φ şi ψ le considerăm continue, iar φ să aibă derivata continuă. Având în vedere cine sunt variabilele u şi v, avem

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \implies dx = \frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t).$$

Din ultima relaţie, prin integrare în ambii membri, obţinem

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Prin urmare, soluţia generală, reprezentată parametric de

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

este definită pe orice interval real $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care integrala $\displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$ are sens.

Exerciţiul 7.4.2 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y^2 + y'^2 = 1.$$

Soluţie. Reprezentarea parametrică despre care se vorbeşte în teorie este

$$\begin{cases} y = \sin t, \\ y' = \cos t, \; t \in I\!R. \end{cases}$$

Din cea de a doua ecuaţie de mai sus se obţine

$$\frac{dy}{dx} = \cos t \implies dx = \frac{1}{\cos t} dy = \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t dt = dt \implies x = t + C.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este

$$\begin{cases} x = t + C, \\ y = \sin t, \ t \in I\!R \end{cases} \Longleftrightarrow y = \sin{(x - C)}, \ x \in I\!R.$$

În acest exemplu, eliminarea parametrului s–a efectuat simplu. ■

7.4.3 Ecuaţia diferenţială de forma $x = f(y')$

Teorema 7.4.2 *Soluţia generală a ecuaţiei*

$$x = f(y'),$$

unde f *este o funcţie cu derivata continuă întrun interval* $[a, b]$, *este dată de*

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \displaystyle\int p\, f'(p)\, dp + C, \quad p \in [a, b]. \end{cases}$$

Demonstraţie. Să punem $y' = p$ şi să luăm p ca variabilă independentă. Avem

$$x = f(p) \implies dx = f'(p)\, dp.$$

Pe de altă parte din $y' = p$ avem pe rând

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p\, dx = p\, f'(p)\, dp,$$

de unde obţinem pe y printr–o cuadratură

$$y = \int p\, f'(p)\, dp + C.$$

Reunind rezultatele de mai sus constatăm că soluţia generală a ecuaţiei $x = f(y')$ este dată în forma parametrică din enunţul teoremei. ■

Exerciţiul 7.4.3 *Să se integreze ecuaţia diferenţială* $x = y' + e^{y'}$.

Soluţie. Dacă punem $y' = p$, din ecuaţie obţinem

$$x = p + e^p \implies dx = (1 + e^p)dp.$$

Pornind din nou de la notaţia $y' = p$ şi utilizând rezultatul stabilit mai sus, avem

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p\,dx \implies dy = p(1 + e^p)dp.$$

Prin integrarea ultimei egalităţi, obţinem

$$y = \int (p + pe^p)dp = \frac{1}{2}p^2 + (p-1)e^p + C, \quad p \in I\!R.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este dată parametric de

$$\begin{cases} x &= p + e^p, \\ y &= \dfrac{1}{2}p^2 + (p-1)e^p + C, \quad p \in I\!R. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului p presupune rezolvarea unei ecuaţii transcendente. ■

7.4.4 Ecuaţia diferenţială de tipul $F(x, y') = 0$

Integrarea aceastei ecuaţii diferenţiale se reduce la o cuadratură dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$.

Să presupunem că o reprezenatre parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ este

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \quad t \in [a, b] \subset I\!R, \end{cases}$$

în care funcţiile φ şi ψ sunt continue şi φ are derivată continuă. Având în vedere semnificaţia variabilelor u şi v, avem

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \Longrightarrow dx = \varphi'(t)dt, \\ y' = \psi(t) \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \psi(t) \Longrightarrow dy = \psi(t)\varphi'(t)dt. \end{cases}$$

Din ultima egalitate, prin integrare, obţinem

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este dată de familia de curbe plane

$$\begin{cases} x &= \varphi(t), \\ y &= \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C, \quad t \in [a,b], \end{cases}$$

unde C este o constantă reală arbitrară.

Soluţia generală este definită pe orice interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ pe care integrala

$$\int \psi(t)\varphi'(t)dt$$

are sens.

Exerciţiul 7.4.4 *Să se integreze ecuaţia diferenţială* $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

Soluţie. Trebuie să determinăm o reprezentare parametrică a curbei definită implicit de ecuaţia

$$u^3 + v^3 - 3uv = 0.$$

Vom căuta o reprezentare parametrică $u = u(t)$, $v = v(t)$ cu proprietatea $v = tu$. Mergând cu această valoare a lui v în ecuaţie, după simplificare cu u^2, găsim $u = \dfrac{3t}{1+t^3}$ şi prin urmare $v = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Pentru aflarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale date pornim de la $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ şi $y' = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Penultima relaţie rămâne definitivă, în timp din cea de a doua obţinem

$$dy = \frac{3t^2}{1+t^3}dx = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3(1+t^3) - 9t^3}{(1+t^3)^2}dt = \frac{9(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \cdot t^2\, dt.$$

Funcţia y se determină prin integrare şi obţinem

$$y = \int \frac{9(1-t^3)}{(1+t^3)^3} \cdot t^2\, dt = 9\int \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^3} - 6\int \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^2}.$$

Astfel, găsim că y are expresia

$$y = -\frac{9}{2}\frac{1}{(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C.$$

Prin urmare, soluţia generală este dată parametric prin

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = -\dfrac{9}{2(1+t^3)^2} + \dfrac{6}{1+t^3} + C, \quad t \neq -1. \end{cases}$$

■

7.4.5 Ecuaţia diferenţială de tip Lagrange

Definiţia 7.4.1 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma*

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y'), \tag{7.149}$$

în care membrul al doilea este o funcţie liniară de x, cu coeficienţi funcţii de clasă $C^1(I)$, $I \subset I\!R$, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Lagrange** *sau* **ecuaţie Lagrange**.

Teorema 7.4.3 *Integrarea unei ecuaţii Lagrange se reduce la integrarea unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi.*

Demonstraţie. În (7.149) efectuăm înlocuirea

$$y' = p, \quad p = p(x). \tag{7.150}$$

Cu notaţia (7.150), ecuaţia (7.149) devine

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p). \tag{7.151}$$

Derivând (7.97) în raport cu x şi ţinând seama de partea a doua a relaţiei (7.97), avem

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx}. \tag{7.152}$$

În ecuaţia (7.152) înlocuim membrul întâi cu p şi avem

$$p = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx} \tag{7.153}$$

sau

$$\Big(x\,\varphi'(p) + \psi'(p)\Big)\frac{dp}{dx} + \varphi(p) - p = 0. \tag{7.154}$$

Dacă considerăm p ca variabilă independentă şi x ca funcţie necunoscută, ecuaţia (7.154) se scrie în forma

$$\Big(\varphi(p) - p\Big)\frac{dx}{dp} + x\,\varphi'(p) + \psi'(p) = 0, \tag{7.155}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi în $x = x(p)$.

Considerăm întâi că funcţia φ este definită pe un subinterval al intervalului I în care ecuaţia

$$\varphi(p) - p = 0 \tag{7.156}$$

nu are nici o soluţie. În acest caz ecuaţia (7.155) se scrie în forma

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x \;=\; -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \tag{7.157}$$

Folosind formula de integrare a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi, vom avea

$$x = f(p, C). \tag{7.158}$$

Dacă ţinem seama de ecuaţiile (7.152) şi (7.158) obţinem soluţia generală a ecuaţiei Lagrange sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = f(p, C), \\ y = f(p, C)\,\varphi(p) + \psi(p). \end{cases} \tag{7.159}$$

Să studiem acum cazul în care p_0 este o rădăcină reală a ecuaţiei (7.156). În acest caz, ecuaţia (7.154) admite soluţia $p = p_0$. Dacă înlocuim în (7.97) pe p cu p_0, şi ţinem cont de (7.156), obţinem

$$y = p_0 x + \psi(p_0), \tag{7.160}$$

care este o soluţie a ecuaţiei Lagrange (7.149) care nu este conţinută în soluţia generală (7.159) şi deci este soluţie singulară.

În legătură cu comportarea curbelor integrale ale ecuaţiei diferenţiale de tip Lagrange faţă de dreapta (7.160) putem avea două situaţii:

- dacă $\lim\limits_{p\to p_0} |x| = \lim\limits_{p\to p_0} |f(p, C)| = +\infty$, dreapta (7.160) este o direcţie asimptotică a curbelor integrale (7.159).

- dacă $\lim\limits_{p\to p_0}|x| = \lim\limits_{p\to p_0}|f(p,C)| =$ finit, (7.160) este soluţie singulară a ecuaţiei (7.149).

■

Exerciţiul 7.4.5 *Să se integreze ecuaţia diferenţială de tip Lagrange*

$$y = x\,{y'}^2 + {y'}^3.$$

Soluţie. Notăm $y' = p$, deci $y = xp^2 + p^3$; derivăm în raport cu x,

$$p = 2\,x\,p\,\frac{dp}{dx} + p^2 + 3p^2\,\frac{dp}{dx}$$

şi, în ipoteza $p^2 - p \neq 0$, obţinem ecuaţia liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}\,x = -\,\frac{3p}{p-1},$$

care are soluţia generală

$$x = e^{-\int \frac{2}{p-1}dp}\Big(C - \int \frac{3p}{p-1}e^{\int \frac{2}{p-1}dp}dp\Big).$$

Efectuând integrările, găsim

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\Big(C - p^3 + \frac{3}{2}p^2\Big).$$

Înlocuind expresia lui x ca funcţie de p în $y = xp^2 + p^3$ determinăm y ca funcţie de p. După calcule elementare, găsim

$$y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\Big(C - \frac{1}{2}p^2 + p\Big).$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date, reprezentată parametric, este

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{(p-1)^2}\Big(C - p^3 + \dfrac{3}{2}p^2\Big), \\ y &= \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\Big(C - \dfrac{1}{2}p^2 + p\Big). \end{cases}$$

Ecuaţia $p^2 - p = 0$ are rădăcinile $p = 0$ şi $p = 1$, care conduc la soluţiile singulare $y = 0$, respectiv $y = x + 1$.

Deoarece pentru $p \to 1$ şi $C \neq -\dfrac{1}{3}$ avem $|x| \to +\infty$, rezultă că dreapta $y = x + 1$ este direcţie asimptotică a curbelor integrale care au $C \neq -\dfrac{1}{3}$. Dacă $C = -\dfrac{1}{3}$, curba integrală corespunzătoare se descompune în dreapta $y = x + 1$ şi o curbă algebrică de ordinul al doilea (conică). ■

Exerciţiul 7.4.6 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y = x\,y'^2 + y'^2.$$

Soluţie. Notând $y' = p$, ecuaţia devine $y = x\,p^2 + p^2$. Derivând în ambii membri în raport cu x şi ţinând seama că $y' = p$, obţinem

$$p = p^2 + 2\,x\,p\,\frac{dp}{dx} + 2\,p\,\frac{dp}{dx}.$$

Pentru $p \neq 0$, ecuaţia diferenţială corespunzătoare este cu variabile separabile. După separarea variabilelor, ecuaţia devine

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p},$$

iar integrarea acesteia conduce la

$$x + 1 = \frac{C}{(p-1)^2},$$

de unde rezultă x ca funcţie de p.

Înlocuind această valoare a lui x în expresia lui y ca funcţie de x şi p, găsim

$$y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date se reprezintă parametric în forma

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1, \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Dacă $p = 0$, din ecuaţia iniţială deducem $y = 0$ care este soluţie singulară deoarece

$$\lim_{p\to 0} |x| = \lim_{p\to 0} |f(p, C)| = \lim_{p\to 0} \frac{C}{(p-1)^2} - 1 = C - 1 = \text{ finit.}$$

Curba integrală corespunzătoare soluţiei singulare este axa Ox. ■

7.4.6 Ecuaţia diferenţială de tip Clairaut

Definiţia 7.4.2 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma*

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{7.161}$$

în care ψ este o funcţie de variabila reală y', de clasă $C^1(I)$, $I \subset I\!R$, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Clairaut** *sau* **ecuaţie Clairaut**.

Teorema 7.4.4 *Ecuaţia Clairaut* (7.161) *are soluţia generală*

$$y = C\,x + \psi(C) \tag{7.162}$$

şi admite o soluţie singulară reprezentată parametric de

$$\begin{cases} x &= -\,\psi'(p), \\ y &= -\,p\,\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \tag{7.163}$$

care, din punct de vedere geometric, este înfăşurătoarea dreptelor din (7.162).

Demonstraţie. După cum se vede o ecuaţie Clairaut este o ecuaţie Lagrange particulară, anume când $\varphi(p) = p$. Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru ecuaţia diferenţială de tip Lagrange. Înlocuim pe y' cu p

$$y = xp + \psi(p),$$

apoi derivăm în raport cu x şi ţinem seama că p este funcţie de x. Avem

$$p = p + x\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx} \implies \Big(x + \psi'(p)\Big)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Din ultima egalitate desprindem două posibiltăţi:

- $\dfrac{dp}{dx} = 0$, adică $p = C$. Înlocuind $p = C$ în (7.161), obţinem soluţia generală (7.162). Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei Clairaut reprezintă geometric o familie de drepte a cărei ecuaţie se obţine înlocuind în e-cuaţia diferenţială (7.161) pe y' cu o constantă C;
- $x + \psi'(p) = 0$, de unde $x = -\psi'(p)$ şi dacă înlocuim în (7.161) acest rezultat, obţinem o curbă integrală a ecuaţiei (7.161) reprezentată parametric de (7.163). Din punct de vedere geometric, curba integrală (7.163) este înfăşurătoarea familiei de drepte (7.162) deoarece ecua-ţiile ei se obţinprin eliminarea constantei C între (7.162) şi derivata în raport cu C a lui (7.162).

■

Exerciţiul 7.4.7 *Să se integreze ecuaţia diferenţială de tip Clairaut*

$$y = xy' - e^{y'}.$$

SoluţiPunem $y' = p$ şi rescriem ecuaţia dată în forma $y = x\,p - e^p$. Diferenţiind–o, obţinem

$$dy = pdx + xdp - e^p dp.$$

Cum $dy = pdx$, din ultimul rezultat se deduce $(x - e^p)dp = 0$. În acest fel, sau $dp = 0$, sau $x = e^p$. Dacă luăm $dp = 0$, atunci $p = C$; înlocuind această valoare a lui p în egalitatea $y = px - e^p$, obţinem soluţia generală în forma

$$y = Cx - e^C.$$

Dacă luăm $x = e^p$, atunci $y = p\,e^p - e^p = (p-1)e^p$ şi ajungem la soluţia singulară

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p-1)e^p, \quad p \in I\!R. \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului p din soluţia singulară, care are valoarea $p = \ln x$, găsim că ecuaţia carteziană explicită a soluţiei singulare este

$$y = x(\ln x - 1).$$

Să demonstrăm că soluţia singulară este înfăşurătoarea familei de drepte ce reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date, adică ar trebui să demonstrăm că tangenta la soluţia singulară, întrun punct (x_0, y_0) al ei, are forma

unei drepte identice cu cea din soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date. Ecuaţia tangentei este

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0), \quad \text{sau} \quad y - x_0(\ln x_0 - 1) = (x - x_0)\ln x_0$$

care, după reducerea termenilor asemenea, devine $y = x \ln x_0 - x_0$. Dacă aici punem $\ln x_0 = C$, ecuaţia tangentei la curba integrală ce provine din soluţia singulară, întrun punct (x_0, y_0) al ei, este $y = Cx - e^C$, adică tocmai curba integrală ce provine din soluţia generală. ■

7.4.7 Ecuaţia diferenţială de forma $y = f(x, y')$

Ne propunem să arătăm cum se integrează ecuaţiile diferenţiale de forma

$$y = f(x, y'), \tag{7.164}$$

unde f este o funcţie diferenţiabilă pe un domeniu plan. Dacă notăm $y' = p$ ecuaţia devine

$$y = f(x, p)$$

care, derivată în raport cu x, unde se ţine cont de faptul că $p = p(x)$, conduce la

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{7.165}$$

adică la o ecuaţie rezolvată în raport cu $\dfrac{dp}{dx}$.

Dacă putem integra (7.165) avem

$$p = \varphi(x, C)$$

care, introdusă în (7.164), ne conduce la soluţia generală căutată

$$y = f\Big(x, \varphi(x, C)\Big).$$

Exerciţiul 7.4.8 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y = y'^2 - y'\,x + \frac{x^2}{2}.$$

Soluţie. Punem $y' = p$, deci $y = p^2 - px + \dfrac{x^2}{2}$, derivăm în raport cu x şi ţinem seama că $p = p(x)$:

$$p = 2\,p\,\frac{dp}{dx} - x\,\frac{dp}{dx} - p + x \implies (2p - x)(1 - \frac{dp}{dx}) = 0.$$

Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 1$, atunci avem $p = x + C$ care introdus în ecuaţia $y = p^2 - px + \dfrac{x^2}{2}$ conduce la soluţia generală

$$y = C^2 + C\,x + \frac{1}{2}\,x^2, \quad x \in I\!R.$$

Dacă $x = 2p$, din aceeaşi ecuaţie folosită mai sus deducem $y = p^2$. Prin urmare, obţinem soluţia reprezentată parametric

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2, \quad p \in I\!R, \end{cases}$$

care, nefiind obţinută din soluţia generală de mai sus pentru nici o valoare a lui C, este soluţie singulară. Se observă că soluţia singulară, care este o parabolă, este înfăşurătoarea familiei de curbe integrale din soluţia generală care sunt tot parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa Oy. ■

Exerciţiul 7.4.9 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$xy'^2 + (y - 3x)y' + y = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia diferenţială dată se poate scrie în forma

$$y = x \cdot \frac{3y' - y'^2}{1 + y'}$$

şi se încadrează în tipul studiat mai sus.

Înlocuind $y' = p$, obţinem

$$y = x \cdot \frac{3p - p^2}{1 + p}. \tag{7.166}$$

Derivând (7.166) în raport cu x, obţinem ecuaţia

$$(p+1)\Big(\frac{2}{x}+\frac{p+3}{p(p+1)}\cdot\frac{dp}{dx}\Big)=0,$$

din care rezultă $p=1$ precum şi ecuaţia

$$\frac{p+3}{p(p+1)}dp+\frac{2}{x}dx=0, \tag{7.167}$$

care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separate.

Integrând, obţinem

$$x^2=C\frac{(p+1)^2}{p^3}. \tag{7.168}$$

Înlocuind (7.168) în ceea ce se obţine din (7.166) prin ridicare la pătrat, găsim

$$y^2=C\frac{(p-3)^2}{p}. \tag{7.169}$$

Eliminând pe p între (7.168) şi (7.169), determinăm soluţia generală sub formă implicită

$$(xy^2+Cy+3Cx)(y^3+15Cy-27Cx)+C^2(y-9x)^2=0. \tag{7.170}$$

Considerând acum $p=1$ şi mergând cu această valoare a lui p în ecuaţia (7.166), găsim că $y=x$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale iniţiale. Această soluţie nu se poate obţine din soluţia generală şi prin urmare este soluţie singulară. ■

7.4.8 Ecuaţia diferenţială de tipul $x=f(y,y')$

La fel ca la celelalte ecuaţii diferenţiale studiate în acest paragraf, se face notaţia $y'=p$, deci ecuaţia dată devine

$$x=f(y,p). \tag{7.171}$$

Derivând, de data aceasta în raport cu y, în ambii membri ai lui (7.171) şi ţinând cont că x şi p pot fi considerate funcţii de y, găsim

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dy}. \tag{7.172}$$

Dacă putem integra (7.172), care este o ecuaţie diferenţială în funcţia necunoscută p, cu variabila independentă y, obţinem

$$p=\varphi(y,C). \tag{7.173}$$

Introducerea lui (7.173) în (7.171) conduce la soluţia generală

$$x=f\Big(y,\varphi(y,C)\Big). \tag{7.174}$$

Exerciţiul 7.4.10 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y'^3-4\,x\,y\,y'+8\,y^2=0. \tag{7.175}$$

Soluţie. Se observă că

$$x=\frac{y'^2}{4y}+\frac{2y}{y'} \tag{7.176}$$

şi deci ecuaţia este de tipul celei studiată la acest punct.

Înlocuind $y'=p$ şi derivând în raport cu y, după reducerea termenilor asemenea şi grupări convenabile se ajunge la

$$(p^3-4y^2)\Big(2y\frac{dp}{dy}-p\Big)=0. \tag{7.177}$$

Dacă considerăm cazul când se anulează cel de al doilea factor, adică $2y\dfrac{dp}{dy}-p=0$, integrând ecuaţia corespunzătoare găsim

$$p=C\,\sqrt{y}. \tag{7.178}$$

Înlocuind această valoare a lui p în ecuaţia $x=f(y,p)$, deducem

$$C^3-4Cx+8\sqrt{y}=0\implies y^2=C_1(x-C_1)^2,\quad (4C_1=C^2). \tag{7.179}$$

Celălalt factor egalat cu zero conduce în cele din urmă la parabola cubică $y=\dfrac{4}{27}x^3$, care este o soluţie singulară. ∎

Capitolul 8

Ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin n integrabile prin cuadraturi

În acest capitol vom prezenta tipuri de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin superior cărora li se pot reduce ordinul şi care apoi pot fi integrate prin operaţii de cuadrare.

8.1 Ecuaţii diferenţiale de tipul $y^{(n)} = f(x)$

Considerăm ecuaţie diferenţială de ordinul n simplă

$$y^{(n)} = f(x), \tag{8.1}$$

unde f este o funcţie continuă pe un interval I.

Ea se integrează uşor prin cuadraturi. Într-adevăr, din ecuaţia (8.1) obţinem prin integrări succesive

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_k}{k!}(x-x_0)^k,\ x \in I, \tag{8.2}$$

unde $C_0,\ C_1, \cdots,\ C_{n-1}$ sunt constante arbitrare, iar x_0 este un punct oarecare, însă fix din intervalul I.

Exerciţiul 8.1.1 *Să se afle soluţia ecuaţiei diferenţiale* $y^{'''} = 24\,x$ *care satisface condiţiile iniţiale* $y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y^{''}(0) = 2.$

Soluţie. Prin integrări succesive, obţinem soluţia generală

$$y = x^4 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \tag{8.3}$$

Impunând soluţiei (8.3) să satisfacă condiţiile iniţiale, găsim $C_3 = 1$, $C_2 = -1$ şi $C_1 = 1$.

Prin urmare, soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială dată este $y = x^4 + x^2 - x + 1$. ■

8.2 Ecuaţia diferenţială $F(x, y^{(n)}) = 0$

Teorema 8.2.1 *Fie ecuaţia diferenţială*

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{8.4}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$,

$$\begin{cases} u &= \varphi(t), \\ v &= \psi(t), \end{cases} \tag{8.5}$$

cu φ şi ψ funcţii continue cu derivate continue pe un interval I, integrala generală pe I a ecuaţiei diferenţiale (8.4) *se obţine prin n cuadraturi.*

Demonstraţie. Din reprezentarea parametrică (8.5), deducem mai întâi

$$\begin{cases} x &= \varphi(t), \\ y^{(n)} &= \psi(t), \end{cases} \tag{8.6}$$

şi apoi

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}dx = \varphi'(t)\psi(t)dt.$$

Din ultima relaţie, printr–o cuadratură, obţinem

$$y^{(n-1)} = \int \varphi'(t)\psi(t)dt + C_0 = \Phi_1(t) + C_0. \tag{8.7}$$

Relaţia (8.7) poate fi scrisă în forma

$$d(y^{(n-2)}) = (\Phi_1(t) + C_0)\varphi'(t)dt \tag{8.8}$$

şi după integrare aceasta ne dă

$$y^{(n-2)} = \int \Phi_1(t)\varphi'(t)dt + C_0\varphi(t) + C_1.$$

Repetând operaţia de n ori obţinem pe y ca funcţie de t

$$y = \Phi(t) + P_{n-1}(\varphi(t)), \quad t \in I, \tag{8.9}$$

unde P_{n-1} este un polinom de grad $n-1$, cu coeficienţi reali arbitrari, având variabila funcţia φ. Relaţia (8.9) împreună cu prima relaţie din (8.6) ne dă integrala generală sub formă parametrică. ■

Observaţia 8.2.1 *Dacă ecuaţia* (8.4) *defineşte implicit pe* x *prin relaţia*

$$x = f(y^{(n)}), \tag{8.10}$$

atunci o reprezentare parametrică este dată de

$$\begin{cases} y^{(n)} &= t, \\ x &= f(t). \end{cases} \tag{8.11}$$

Din prima relaţie (8.11), *găsim*

$$y = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + C_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots, \ +C_{n-1}t + C_n. \tag{8.12}$$

Cea de a doua relaţie din (8.11) *şi cu* (8.12) *dau o reprezentare parametrică pentru soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale* (8.4) *în cazul particular când din ecuaţia* $F(u,v) = 0$ *se poate explicita* v *ca funcţie de* u.

Exerciţiul 8.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x = y'' + \ln y'', \quad y'' > 0. \tag{8.13}$$

Soluţie. Ecuaţia dată se încadrează în Observaţia 8.2.1. Cu notaţia $y'' = t$ avem că $x = t + \ln t$. Apoi:

$$y' = \int y''dx = \int t(1 + \frac{1}{t})dt = \frac{1}{2}t^2 + t + C_1;$$
$$y = \int y'dx = \int \Big(\frac{1}{2}t^2 + t + C_1\Big)\Big(1 + \frac{1}{t}\Big)dt + C_2.$$

Din cele deduse mai sus rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (8.13) este dată parametric de

$$\begin{cases} x = t + \ln t, \\ y = \dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{3}{4}t^2 + C_1(t + \ln t) + t + C_2, \quad t > 0, \end{cases}$$

de unde vedem că ea depinde de două constante arbitrare. Dacă din prima ecuaţie se poate determina în mod unic t ca funcţie de x, înlocuind rezultatul în expresia lui y ca funcţie de t se poate obţine soluţia generală în forma $y = g(x, C_1, C_2)$. ■

8.3 Ecuaţia diferenţială $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Teorema 8.3.1 *Fie ecuaţia diferenţială*

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{8.14}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$,

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \end{cases} \tag{8.15}$$

cu φ, ψ *şi* φ' *funcţii continue, iar* $\psi(t) \neq 0$ *pe un interval* I, *integrala generală pe* I *a ecuaţiei diferenţiale* (8.14) *se obţine prin* n *cuadraturi.*

Demonstraţie. Din reprezentarea parametrică (8.15) putem scrie:

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad t \in I;$$
$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad d(y^{(n-1)}) = \psi(t)dx, \quad t \in I;$$
$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

Din ultima relaţie, printr–o cuadratură, obţinem

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_0 = \Phi(t) + C_0. \tag{8.16}$$

Avem aşadar

$$\begin{cases} x &= \Phi(t) + C_0, \\ y^{(n-1)} &= \varphi(t), \end{cases}$$

şi am redus problema integrării la acea rezolvată la punctul precedent. Mai precis, avem

$$d(y^{(n-2)}) = \varphi(t)dx = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt,$$

de unde, printr–o cuadratură, găsim

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1.$$

Procedeul continuă şi după $n-2$ cuadraturi se obţine integrala generală sub formă parametrică. ■

Exerciţiul 8.3.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială de ordinul trei*

$$y'''^2 + y''^2 = 1.$$

Soluţie. O reprezentare parametrică a ecuaţiei $u^2+v^2 = 1$ este $u = \sin t,\ v = \cos t$, de unde deducem $y'' = \sin t,\ \ y''' = \cos t$. Avem $d(y'') = y'''dx$, sau $\cos t\, dt = \cos t\, dx$, deci $dx = dt \implies x = t + C_1$. Din $y'' = \sin t$ şi $x = t + C_1$ obţinem pe rând

$$\begin{aligned} y'' &= \sin(x - C_1), \\ y' &= -\cos(x - C_1) + C_2, \\ y &= -\sin(x - C_1) + C_2 x + C_3, \quad x \in I\!R. \end{aligned}$$

Ultima funcţie de mai sus reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date. ■

8.4 Ecuaţia diferenţială $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

Teorema 8.4.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma particulară*

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \tag{8.17}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u,v)=0$,

$$\begin{cases} u &=& \varphi(t), \\ v &=& \psi(t), \end{cases} \tag{8.18}$$

unde φ, ψ *şi* φ' *sunt funcţii continue pe un interval* $I \subset \mathbb{R}$, *atunci integrala generală a ecuaţiei diferenţiale* (8.17) *se obţine prin n cuadraturi.*

Demonstraţie. Din ecuaţiile parametrice (8.18) avem

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t) \tag{8.19}$$

sau

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}dx, \quad d(y^{(n-2)}) = y^{(n-1)}dx, \tag{8.20}$$

din care, evaluând pe dx şi egalând rezultatele, deducem

$$\frac{d(y^{(n-1)})}{y^{(n)}} = \frac{d(y^{(n-2)})}{y^{(n-1)}}. \tag{8.21}$$

Folosind (8.19) în (8.21), avem $y^{(n-1)}d(y^{(n-1)}) = \psi(t)\varphi'(t)dt$. Integrând această ecuaţie diferenţială, obţinem $[y^{(n-1)}]^2 = 2\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1$, din care, mai departe, găsim

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1}. \tag{8.22}$$

Relaţia (8.22) împreună cu prima relaţie din (8.19) arată că ecuaţia dată s–a redus la tipul studiat la punctul precedent. ∎

Exerciţiul 8.4.1 *Să se determine soluţiile ecuaţiei diferenţiale*

$$y'''y' = y''^2.$$

Soluţie. Se observă că ecuaţia dată se mai scrie în forma

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''}{y'} \Longrightarrow \ln y'' = \ln y' + \ln C_1 \Longrightarrow y'' = C_1 y' \Longrightarrow d(y') = d(C_1 y),$$

din care rezultă ecuaţia diferenţială cu variabile separabile $y' = C_1 y + C_2$. După separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{dy}{C_1 y + C_2} = dx \Longrightarrow \ln(C_1 y + C_2) = C_1(x + C_3) \Longrightarrow C_1 y + C_2 = e^{C_1(x+C_3)}$$

şi în acest mod s–a obţinut soluţia generală a ecuaţiei date sub formă explicită în care intervin trei constante arbitrare. ∎

Capitolul 9

Ecuaţii diferenţiale ordinare care admit micşorarea ordinului

9.1 Ecuaţia $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$

Teorema 9.1.1 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul n*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{9.1}$$

în care lipsesc funcţia necunoscută y şi derivatele sale până la ordinul $k-1$, prin schimbarea de funcţie

$$y^{(k)} = u \tag{9.2}$$

se transformă în ecuaţia diferenţială de ordinul $n-k$

$$F(x, u, u', \cdots, u^{(n-k)}) = 0. \tag{9.3}$$

Demonstraţie. Dacă punem $y^{(k)} = u$, obţinem relaţiile

$$y^{(k+1)} = u',\ y^{(k+2)} = u'', \ldots,\ y^{(n)} = u^{(n-k)},$$

pe care dacă le înlocuim în (9.1) obţinem (9.3). Dacă reuşim să integrăm pe (9.3), deci să obţinem soluţia generală

$$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}),$$

integrarea ecuaţiei (9.1) se reduce la integrarea ecuaţiei de ordinul k

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}),$$

care este de tipul uneia studiate anterior. ■

Exerciţiul 9.1.1 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x\,y^{(4)} - y^{(3)} = 2\,x^3 \tag{9.4}$$

şi apoi să se determine acea soluţie care satisface condiţiile:

$$y(1) = 1;\; y'(1) = 1;\; y''(1) = 0;\; y^{(3)}(1) = 0.$$

Soluţie. Dacă punem $y^{(3)} = u$, se obţine ecuaţia în u

$$x\,u' - u = 2\,x^3,$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă cu soluţia generală

$$u = C_1 x + x^3.$$

Revenind la funcţia iniţială, obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul trei

$$y^{(3)} = C_1 x + x^3.$$

Integrând succesiv ultima ecuaţie, avem:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2}C_1 x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C_2;\\ y' &= \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{20}x^5 + C_2 x + C_3;\\ y &= \frac{1}{24}C_1 x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad x \in I\!R. \end{aligned}$$

Ultima relaţie este soluţia generală a ecuaţiei din enunţ.

Impunând condiţiile iniţiale, obţinem un sistem liniar, neomogen de 4 ecuaţii cu necunoscutele C_1, C_2, C_3, C_4. Rezolvând acest sistem, găsim

$$C_1 = -1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}, \quad C_3 = \frac{13}{15}, \quad C_4 = \frac{1}{24}.$$

Prin urmare, soluţia care îndeplineşte condiţiile iniţiale este

$$y(x) = \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{15}x + \frac{1}{24}.$$

■

9.2 Ecuaţia $F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

Teorema 9.2.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma*

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{9.5}$$

Prin transformarea $y' = p$ şi luând pe y ca variabilă independentă, ecuaţiei date i se paote reduce ordinul cu o unitate.

Demonstraţie. Transformarea care urmează să o efectuăm se poate scrie $\dfrac{dy}{dx} = p$. Derivând această egalitate în raport cu x obţinem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy}; \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(p\cdot\frac{dp}{dy}\Big) = \frac{d}{dy}\Big(p\cdot\frac{dp}{dy}\Big)\cdot\frac{dy}{dx} = \\ &= p\cdot\Big(\frac{dp}{dy}\Big)^2 + p^2\cdot\frac{d^2p}{dy^2}. \end{aligned}$$

Derivatele de ordin 4 şi mai mare se calculează în mod asemănător.

Analizând aceste derivate, constatăm că derivata de ordinul k a funcţiei y în raport cu x de $k-$ori se obţine cu ajutorul funcţiei p şi ale derivatelor acesteia în raport cu variabila y până la ordinul $k-1$.

Înlocuirea în (9.5) a tuturor derivatelor astfel calculate conduce la o ecuaţie diferenţială de ordin $n-1$ în funcţia necunoscută $p = p(y)$. ■

Exerciţiul 9.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y\,y'' + y'^2 + y^2 = 0.$$

Soluţie. Procedăm conform demonstraţiei de mai sus. Avem $y' = p$, $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}$. Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, obţinem

$$y\,p\,\frac{dp}{dy} + p^2 + y^2 = 0,$$

care este o ecuaţie diferenţială omogenă pentru că se poate scrie în forma

$$\frac{dp}{dy} = -\,\frac{1 + \left(\dfrac{p}{y}\right)^2}{\dfrac{p}{y}}.$$

După efectuarea schimbării $p = y\,z \implies \dfrac{dp}{dy} = y\,\dfrac{dz}{dy} + z$ în ultima ecuaţie diferenţială, urmată de separarea variabilelor, aceasta devine

$$\frac{dy}{y} = -\,\frac{z\,dz}{1 + 2z^2}.$$

Soluţia generală a ultimei ecuaţii diferenţiale este

$$y^4 = \frac{C_1}{1 + 2\,z^2}.$$

Revenind la p, soluţia de mai sus se poate scrie

$$y^2 = \frac{C_1}{1 + 2\,p^2}$$

din care deducem

$$p^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{C_1 - y^4}{y^2}$$

care mai departe implică

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{C_1 - y^4}}{y}.$$

Ultimele ecuaţii obţinute sunt cu variabile separabile. Efectuând separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 - y^4}} = \pm\,\frac{dx}{\sqrt{2}},$$

care integrate dau soluţiile

$$\pm\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 = \frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{y^2}{\sqrt{C_1}}.$$

Soluţia generală depinde de două constante arbitrare deoarece ecuaţia diferenţială ordinară dată este de ordinul al doilea. ■

9.3 Ecuaţia $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$, omogenă în $y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}$

Teorema 9.3.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma*

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{9.6}$$

omogenă în variabilele $y, y', \cdots, y^{(n)}$. Prin schimbarea de funcţie $\dfrac{y'}{y} = u$ ordinul ecuaţiei se reduce cu o unitate.

Demonstraţie. Din faptul că ecuaţia diferenţială (9.6) este omogenă în variabilele $y, y', \cdots, y^{(n)}$ rezultă că ea se poate scrie în forma

$$G\Big(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \cdots, \frac{y^{(n)}}{y}\Big) = 0. \tag{9.7}$$

Făcând substituţia $y' = y\,u$, obţinem succesiv:

$$y'' = (yu)' = y'u + yu' = y(u^2 + u');$$

$$y''' = \Big(y(u^2 + u')\Big)' = y'(u^2 + u') + y(2uu' + u'') = y(u^3 + 3uu' + u'').$$

Derivatele următoare ale funcţiei y se calculează asemănător.

Din aceste calcule deducem că raportul dintre derivata de ordinul k a funcţiei y şi funcţia y este o expresie în care apar funcţia u şi derivatele până la ordinul $k-1$, deci dacă înlocuim aceste rapoarte în (9.7) obţinem o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$ în funcţia necunoscută u care depinde de aceeaşi variabilă x. ■

Exerciţiul 9.3.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^2yy'' = (y - xy')^2.$$

Soluţie. Tipul acestei ecuaţii se încadrează în cel studiat mai sus pentru că funcţia $x^2yy'' - (y - xy')^2$ este un polinom omogen de gradul al doilea în variabilele y, y' şi y''. Dacă facem schimbarea de funcţie $y' = uy$ obţinem $y'' = y(u^2 + u')$ şi ecuaţia se transformă în

$$x^2(u^2 + u') = (1 - xu)^2 \implies x^2u' + 2xu = 1,$$

care este o ecuaţie liniară cu soluţia generală

$$u = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Amintindu–ne cine este funcţia u, din ultimul rezultat obţinem ecuaţia diferenţială

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2},$$

care este o ecuaţie cu variabile separate. Integrarea ei conduce la

$$\ln y = \ln x - \frac{C_1}{x} + C_2 \implies y = x\, e^{C_2 - C_1/x},$$

unde x aparţine unui interval I cuprins în intervalul $(0, +\infty)$. ■

9.4 Ecuaţia $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$, omogenă în x, y, dx, dy, d^2y, $\cdots$, d^ny

Teorema 9.4.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma*

$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\Big) = 0 \tag{9.8}$$

omogenă în variabilele $x, y, dx, dy, d^2y, \cdots, d^ny$. Prin schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$|x| = e^t, \quad \frac{y}{x} = u \tag{9.9}$$

ordinul ecuaţiei se reduce cu o unitate.

Demonstraţie. Din faptul că ecuaţia dată este omogenă rezultă că ea se poate scrie în forma

$$G\Big(\frac{y}{x}, y', xy'', x^2y''', \cdots, x^{n-1}y^{(n)}\Big) = 0. \tag{9.10}$$

În ipoteza că intervalul I pe care se caută soluţiile ecuaţiei (9.8) este inclus în intervalul $(0, +\infty)$, facem schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$x = e^t, \quad \frac{y}{x} = u, \quad t \in J \subset I\!R, \quad u = u(t). \tag{9.11}$$

Constatăm prin calcul că obţinem succesiv:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ux) = x\dfrac{du}{dx} + u = x\dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dx} + u = \dfrac{du}{dt} + u; \\ xy'' = x\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{du}{dt} + u\Big) = x\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{du}{dt} + u\Big)\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{du}{dt}; \\ x^2y''' = \dfrac{d^3u}{dt^3} - \dfrac{du}{dt}. \end{cases} \tag{9.12}$$

Continuând calculele pentru a determina expresia $x^k y^{(k+1)}$, $k \geq 3$, ajungem la concluzia că aceasta se exprimă în funcţie numai de derivatele până la ordinul $k+1$ ale funcţiei u. Folosind (9.11) şi expresiile (9.12) ale termenilor de forma $x^s y^{(s+1)}$, $s \in \overline{1, n-1}$, constatăm că (9.10) devine o ecuaţie de forma

$$H\Big(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nu}{dt^n}\Big) = 0, \tag{9.13}$$

care este o ecuaţie de forma (9.6) despre care ştim că, cu schimbarea $\dfrac{du}{dt} = p$, admite o reducere a ordinului cu o unitate.

Dacă intervalul $I \subset (-\infty, 0)$, se fac schimbările

$$x = -e^t, \quad \frac{y}{x} = u, \quad t \in J \subset I\!R, \quad u = u(t)$$

şi raţionamentul decurge asemănător, în final ajungând tot la o ecuaţie de forma (9.13). ■

Exerciţiul 9.4.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^3y'' + xyy' - y^2 = 0$$

pe un interval I cuprins în intervalul $(0, +\infty)$.

Soluţie. Dacă folosim notaţiile lui Leibniz pentru derivatele unei funcţii reale de o variabilă reală constatăm că ecuaţia dată se scrie sub forma echivalentă

$$x^3\,d^2y + x\,y\,dx\,dy - y^2\,dx^2 = 0,$$

de unde se observă că ecuaţia este polinom omogen de grad 4 în variabilele x, y, dx, dy şi d^2y. Conform teoriei prezentată la acest punct, efectuând înlocuirile

$$x = e^t, \quad y = x\,u, \quad u = u(t),$$

deducem că derivata y' şi termenul $x\,y''$ se exprimă prin

$$y = u + u', \quad x\,y'' = u' + u''.$$

Înlocuind în ecuaţie, obţinem

$$e^{2t}(u' + u'') + e^{2t}u(u + u') - e^{2t}u^2 = 0,$$

de unde, după simplificarea cu e^{2t}, deducem ecuaţia diferenţială

$$u'' + u' + uu' = 0.$$

Trecând la funcţia p prin $u' = p$ deducem că $u'' = p\,p'$ şi ecuaţia diferenţială dată se transformă în

$$p(p' + 1 + u) = 0. \tag{9.14}$$

Considerând că $p = 0$ obţinem $u' = 0$, deci $u = C_1$ şi de aici rezultă că $y = C_1 x$ este o primă famile de soluţii ale ecuaţiei.

Anularea celui de al doilea factor din (9.14) conduce la

$$p' + 1 + u = 0 \Longrightarrow \frac{dp}{du} + 1 + u = 0 \Longrightarrow p = -u^2 - u - A_1.$$

Punând în ultimul rezultat $p = \dfrac{du}{dx}$, constatăm că acesta devine

$$\frac{du}{dx} = -u^2 - u - A_1,$$

care este o ecuaţie diferenţială de tip Riccati cu soluţia particulară $u = k$, unde k este o constantă reală, rădăcină a ecuaţiei algebrice $k^2 + k + A_1 = 0$.

În cazul $1 - 4A_1 > 0$ ecuaţia Riccati admite două soluţii reale $u_1 = k_1$ şi $u_2 = k_2$. Dacă efectuăm schimbarea de funcţie

$$v = \frac{u - k_1}{u - k_2},$$

ecuaţia Riccati devine

$$(k_1 - k_2)v' = (4A_1 - 1)v,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile cu soluţia generală

$$v = A_2\, e^{\dfrac{4A_1 - 1}{k_1 - k_2}x}.$$

Dacă avem în vedere că $\dfrac{4A_1 - 1}{k_1 - k_2} = -(k_1 - k_2)$ rezultă că putem scrie

$$ve^{(k_1-k_2)x} = A_2 \Longrightarrow \frac{u - k_1}{u - k_2}e^{(k_1-k_2)x} = A_2 \Longrightarrow \frac{ux - k_1x}{ux - k_2x}e^{(k_1-k_2)x} = A_2.$$

Însă $ux = y$, astfel că ultima egalitate se scrie

$$\frac{y - k_1x}{y - k_2x} \cdot e^{(k_1-k_2)x} = A_2$$

din care, după operaţii simple, se ajunge că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale iniţiale este

$$y = \frac{k_1 \cdot e^{(k_1-k_2)x} - A_2k_2}{e^{(k_1-k_2)x} - A_2}x.$$

Dacă $1 - 4A_1 = 0$ ecuaţia Riccati devine $\dfrac{du}{dx} = -u^2 - u - \dfrac{1}{4}$ şi are soluţia particulară $u = -\dfrac{1}{2}$. Cu substituţia $u = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z}$ ea se transformă în ecuaţia liniară $z' - 1 = 0$, cu soluţia generală $z = x + C_3$, de unde găsim

$$u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x + C_3} \implies y = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{x + C_3}\Big)x.$$

■

9.5 Ecuaţia $F(y, xy', x^2y'', \cdots, x^ny^{(n)}) = 0$

Teorema 9.5.1 *Fie ecuaţia diferenţială ordinară, de ordinul n, de forma*

$$F(y, xy', x^2y'', \cdots, x^ny^{(n)}) = 0. \tag{9.15}$$

Prin schimbarea de variabilă $|x| = e^t$, $t \in I\!R$ în (9.15), ordinul ecuaţiei diferenţiale se reduce cu o unitate.

Demonstraţie. Dacă intervalul I pe care este definită funcţia necunoscută y este inclus în semiaxa reală pozitivă, efectuăm schimbarea de variabilă independentă $x = e^t,\ t \in J \subset I\!\!R$ şi constatăm că variabilele ecuaţiei (9.15) se exprimă după cum urmează

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt} \Longrightarrow x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}; \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} &= \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big) = e^{-t}\dfrac{d}{dt}\Big(e^{-t}\dfrac{dy}{dt}\Big) = e^{-2t}\Big(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\Big); \\ y''' &= e^{-3t}\Big(\dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\,\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\,\dfrac{dy}{dt}\Big), \\ \cdots . \end{cases} \tag{9.16}$$

Din relaţiile (9.16), deducem:

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} &= \dfrac{dy}{dt}; \\ x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} &= \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}; \\ x^3y''' &= \dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt},\ \cdots . \end{cases} \tag{9.17}$$

Se observă că $x^k\dfrac{d^ky}{dx^k}$ se exprimă numai cu primele k derivate în raport cu t ale funcţiei necunoscute y, acum funcţie de t. Prin urmare, utilizând (9.17), ecuaţia (9.15) se transformă întro ecuaţie diferenţială de forma

$$G\Big(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dt^n}\Big) = 0, \tag{9.18}$$

unde nu apare noua variabilă independentă t. Punând $\dfrac{dy}{dt} = p$ şi luând pe y drept variabilă independentă, ecuaţiei (9.18) i se poate reduce ordinul cu o unitate. ■

Exerciţiul 9.5.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^3y''^2 + 2x^2y'y'' + 2yy' = 0,$$

pe un interval $I \subset (0, +\infty)$.

Soluţie. Prin înmulţirea cu x, ecuaţia devine

$$\left(x^2y''\right)^2 + 2(xy')(x^2y'') \;+\; 2\,y(') + 2\,y(xy') = 0.$$

Noua ecuaţie diferenţială fiind de forma studiată mai sus, facem schimbarea de variabilă independentă $x = e^t$. Pentru ca raţionamentul să fie mai clar, vom nota rezultatul compunerii funcţiei y cu funcţia $x = e^t$ prin η, adică $y(x(t)) = y(e^t) = \eta(t)$. Derivatele funcţiei y, calculate în funcţie de derivatele funcţiei η, sunt:

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\eta}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}\cdot\dfrac{d\eta}{dt};\\[2mm] y'' &= \dfrac{d}{dt}\Big(e^{-t}\eta'\Big)e^{-t} \;=\; \Big(e^{-t}\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - e^{-t}\dfrac{d\eta}{dt}\Big) = e^{-2t}\Big(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{d\eta}{dt}\Big). \end{cases}$$

De aici deducem

$$\begin{cases} xy' &= \dfrac{d\eta}{dt};\\[2mm] x^2y'' &= \dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{d\eta}{dt}. \end{cases}$$

În acest fel ecuaţia iniţială devine $\Big(\dfrac{d^2\eta}{dt^2}\Big)^2 + 2\,\eta\,\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \Big(\dfrac{d\eta}{dt}\Big)^2 = 0.$

Deoarece în ultima ecuaţie diferenţială nu intră variabila independentă t, luăm pe $\dfrac{d\eta}{dt}$ ca funcţie necunoscută şi pe η ca variabilă independentă. Avem:

$$\frac{d\eta}{dt} = p; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = p\,\frac{dp}{d\eta}$$

şi ultima formă a ecuaţiei se poate scrie

$$\Big(p\,\frac{dp}{d\eta}\Big)^2 + 2\,\eta\,p\,\frac{dp}{d\eta} \;-\; p^2 = 0.$$

Cu schimbarea de funcţie $p^2 = u$, ajungem la ecuaţia Clairaut

$$u = \eta\,u' + \frac{1}{4}\,u'^2$$

a cărei soluţie generală este

$$u = C\,\eta + \frac{1}{4}\,C^2.$$

Luând $C = 4\,C_1$ şi $u = p^2$, constatăm că

$$p^2 = 4\,C_1\,\eta + 4\,C_1^2.$$

Pe de altă parte,

$$p = \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' \cdot x.$$

Prin urmare,

$$x \cdot y' = \pm 2\sqrt{C_1 y + C_1^2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este

$$\pm\, 2\sqrt{C_1 y + C_1^2} = C_1\, \ln x + C_2 \implies 4(C_1 y + C_1^2) = \Big(C_1\, \ln x + C_2\Big)^2,$$

iar din ultima expresie se poate obţine forma sa explicită. ■

Bibliografie

[1] Adams, Robert, A. *Calculus. A complete Course,* Forth ed., Addison–Wesley, 1999

[2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G., *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986

[3] Bucur, Gh. Câmpu, E., Găină, S. *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. III*, Editura Tehnică, Bucureşti 1967

[4] Crstici, B. (coordonator) *Matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[5] Calistru, N., Ciobanu, Gh. *Curs de analiză matematică. Vol. I,* Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1988

[6] Chiriţă, S. *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1989

[7] Colojoară, I. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983

[8] Craiu, M., Tănase, V. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980

[9] Crăciun, I. *Calcul diferenţial*, Editura Lumina, Bucureşti, 1997

[10] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, Al., Fetecău, C. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare liniară*. Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1984

[11] Cruceanu, V. *Algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1973

[12] Dieudonné, J. *Fondements de l'analyse moderne.* Gauthier–Villars, Paris 1963

[13] Dixon, C. *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester· New York· Brisbane· Toronto 1981

[14] Donciu, N., Flondor, D., Simionescu, Gh. – *Algebră şi analiză matematică.* Vol I, Vol II. Culegere de probleme. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucuresşti 1964

[15] Evgrafov, M., Béjanov, K., Sidorov, Y., Fédoruk, M., Chabounine, M. *Recueil de problèmes sur la theorie des fonctions analytiques*, Deuxième édition, Éditions Mir, Moscou 1974

[16] Flondor, P., Stănăşilă, O. *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Ediţia a II–a, Editura ALL, Bucureşti 1996

[17] Fulks, W. *Advanced Calculus. An introduction to analysis*, third edition, John Wiley & Sons, New York· Santa Barbara· Chichester· Brisbane· Toronto 1978

[18] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. II*, Editura Tehnică, Bucureşti 1966

[19] Gheorghiu, N., Precupanu, T. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1979

[20] Hewitt, E., Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York 1965

[21] Marinescu, Gh. *Analiză matematică, vol. I, Ediţia a V–a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980

[22] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. *Analiză matematică, vol I, ediţia a patra*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1971

[23] Olariu, V. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

[24] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983

[25] Precupanu, A. *Bazele analizei matematice*, Editura Universitţii *Al. I. Cuza*, Iaşi 1993

[26] Sburlan, S. *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1991

[27] Sireţchi, G. *Calcul diferenţial şi integral. Vol. I, II*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985

[28] Radu, C., Drăguşin, C., Drăguşin, L. *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1991

[29] Smirnov, V. *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxième édition, tome II, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou 1972

[30] Stănăşilă, O. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

[31] Sykorski, R. *Advanced Calculus. Functions of several variables*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1969

[32] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988

[33] Zeldovitch, I., Mychkis, A. *Éléments de mathématiques appliquées*, Éditions Mir, Moscou 1974